O Ensino da Regra de Sinais para a Multiplicação: desafios e possibilidades

Selma Felisbino Hillesheim[1]

Méricles T. Moretti[2]

GD2 - Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental

Resumo: A trajetória histórica do conceito de número negativo foi um processo lento e surpreendente. A regra de sinais para a multiplicação foi demonstrada somente em 1867 por Hankel. Assim, ele resolve definitivamente o problema do ponto de vista matemático ao mostrar que a regra de sinais só pode ser explicada pelo princípio formal. Entretanto, do ponto de vista didático, o ensino dos números negativos ainda apresenta problemas, principalmente, no que diz respeito à ideia de congruência semântica. O modelo comercial utilizado para o ensino das propriedades aditivas contribui para a formação de obstáculos no ensino das propriedades multiplicativas dos relativos. Deste modo, Caraça (1963) aponta que o ensino das operações com números negativos devem seguir a ideia do *princípio de extensão.*

Palavras-chave: Números Negativos. Regra de Sinais. Princípio de Extensão. Congruência Semântica.

Introdução

A introdução conceitual dos números negativos, historicamente, foi um processo lento e surpreendente. O germe da regra de sinais é geralmente atribuído a Diofanto de Alexandria que viveu no século III depois de Cristo. Contudo, somente em 1867 Hankel demonstra que a única das regras possíveis é aquela que preserva a distributividade à esquerda e à direita. Isso porque ele aborda a ideia de número negativo numa outra dimensão, que não aquela procurada na natureza.

O homem pelas suas abstrações e generalizações conseguiu transpor o pensamento unicamente concreto e ascender ao campo formal das operações. Foi esta barreira que Hankel derrubou ao mostrar que a explicação para a regra de sinais - × - = + não poderia

[1] Mestranda no Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica na UFSC. Professora do Ensino Fundamental público municipal – São José – SC. e-mail: selmafh@yahoo.com.br.

[2] Doutor em Didática da Matemática. Université Louis Pasteur/ULP. Professor do PPGECT/MTM/UFSC – Florianópolis, SC, Brasil. e-mail: mthmoretti@gmail.com.

ser procurada na natureza, pois ela é fruto do pensamento humano, e como tal precisa ser demonstrada formalmente.

Essa capacidade que o homem civilizado tem para fazer generalizações e abstrações, Caraça (1963) chama de “princípio de extensão”. O trabalho intelectual do homem orientado por certas normas e princípios foi que propiciou a ampliação dos conjuntos numéricos.

Hoje, do ponto de vista matemático, o teorema de Hankel não causa nenhuma dificuldade ou estranheza. Entretanto, do ponto de vista didático-pedagógico muitos obstáculos ainda precisam ser ultrapassados. O modelo comercial, assim denominado por Glaeser (1981), pode facilitar o ensino dos problemas aditivos dos relativos, contudo esta abordagem pode trazer obstáculos para a compreensão de problemas multiplicativos.

Na sala de aula, a adição de números relativos é apresentada contextualizadamente com exemplos que podem convencer rapidamente, até mesmo a um leigo no assunto. Porém, a multiplicação desses números é explicada dogmaticamente.

Sob o ponto de vista da perspectiva da congruência semântica, a adição de números relativos nem sempre representa um ganho, e a subtração nem sempre representa uma perda. Na multiplicação de números inteiros a ideia de adição de parcelas iguais encontra como obstáculo a multiplicação de dois números negativos.

Embrenhados neste contexto problemático nos sentimos desafiados a procurar uma forma de ensinar a regra de sinais para a multiplicação. A pesquisa que estamos desenvolvendo consiste em construir e aplicar uma sequência de ensino numa turma de 7º ano, onde os números inteiros foram apresentados por meio da ideia do *princípio de extensão* de Caraça (1963), opondo-se ao modelo comercial e atentando para os aspectos da congruência semântica.

Neste trabalho, que faz parte da pesquisa em andamento, pretendemos fazer algumas reflexões sobre os desafios que se estabelecem no processo de ensino e aprendizagem da regra de sinais para a multiplicação dos inteiros relativos. Deste modo, alguns elementos que fazem parte da história dos negativos merecem ser elencados.

Elementos históricos

A origem da regra de sinais da multiplicação de números negativos é em geral atribuída a Diofanto de Alexandria. Sobre ele, pouco se sabe, até mesmo o período em que viveu[3]. Este algebrista de nacionalidade desconhecida escreveu três trabalhos: Aritmética, Sobre números poligonais e prisma (EVES, 2004, p. 207).

A regra que estabelece que "- x - = +" aparece no começo do livro I da sua Aritmética de forma explícita: "Menos multiplicado por menos é mais e menos por mais é menos" (DIOFANTO DE ALEXANDRIA, 2007, p. 22). Porém, em nenhum momento Diofanto apresenta uma justificativa para tal regra. Ele apenas a usava nos cálculos intermediários e não aceitava as raízes negativas na solução das equações quadráticas (BOYER, 2010).

O desconforto provocado pelos números negativos perdurou por um longo período. No entanto, percebe-se que tal assunto incomoda os matemáticos a tal ponto que se sentem desafiados a buscar uma explicação plausível para o assunto.

Em 1867 o alemão Hermann Hankel (1839-1873) publica a obra *Theorie der Komplexen Zahlensysteme* que amplia o conceito de número. Ele observava que "a condição para construir uma aritmética universal é pois uma matemática puramente intelectual, desligada de todas as percepções" (BOYER, 2010, p. 389). Hankel estabeleceu o *Princípio da permanência das leis formais:*

> Quando duas formas da arithmetica universalis expressas em símbolos gerais são iguais entre si, elas devem permanecer iguais entre si mesmo quando os símbolos deixam de designar simplesmente grandezas, e dessa forma também as operações podem obter qualquer outro conteúdo (HANKEL, 1867 *apud* NETO, 1995, p. 7).

Pautado neste princípio de permanência, e conhecendo as propriedades aditivas de $\mathbb{R}$ e a multiplicação de $\mathbb{R}^+$, Hankel propõe prolongar a multiplicação de $\mathbb{R}^+$ para $\mathbb{R}$ e enuncia o seguinte Teorema: "A única multiplicação sobre $\mathbb{R}$, que prolonga a multiplicação usual sobre $\mathbb{R}^+$ respeitando as distribuições (à esquerda e à direita) é conforme a regra de sinais".

Demonstração:

$0 = a \times 0 = a \times (b + \text{opp } b) = ab + a \times (\text{opp } b)$

$0 = 0 \times (\text{opp } b) = (\text{opp } a) \times (\text{opp } b) + a \times (\text{opp } b)$

De onde

---

[3] Não se sabe ao certo o período em que Diofanto viveu, mas de acordo com Eves (2004, p. 207 e 209), a maioria dos historiadores o situa no 3º século da nossa Era.

(opp a) × (opp b) = ab   (GLAESER, 1981, p. 338)

Hankel aborda a multiplicação dos números relativos como uma extensão das propriedades dos números reais positivos para os reais. Desta forma, a regra de sinais é uma convenção com vistas à manutenção da consistência interna da própria matemática.

> Não é possível pronunciar-se tão acirradamente contra uma visão tão divulgada que essas equações [as regras dos sinais] jamais possam ser provadas em matemática formal; elas são convenções arbitrariamente estabelecidas para que se preserve o formalismo já existente nos cálculos. [...] Contudo, uma vez definidas, todas as demais leis da multiplicação derivam delas por necessidade (HANKEL, 1867 *apud* SCHUBRING, 2007, p. 6).

A revolução cumprida por Hankel recusando a busca por um bom modelo, segundo Glaeser (1981), consiste em abordar os números numa outra perspectiva. Não podemos mais procurar exemplos práticos que explicam os números relativos por analogias, pois esses números não são mais descobertos, mas inventados, imaginados.

Os números relativos na sala de aula

No Brasil, os números inteiros relativos são apresentados formalmente aos alunos no 7º ano[4] e muitas dificuldades podem ser percebidas no seu processo de ensino e aprendizagem. A não compreensão do conceito de números inteiros relativos e sua repercussão ao longo da trajetória estudantil tem sido uma preocupação dos professores de matemática e de pesquisadores (VIENNOT,1985; PASSONI, 2002; PONTES, 2010; ALVES; MAIA, 2011; MORETTI, 2012) que buscam explicações para as dificuldades encontradas no processo de ensino e aprendizagem desses números, bem como, procuram outros modelos de ensino para os números relativos.

Os alunos chegam ao 7º ano associando a ideia de número a uma grandeza. Isto pode ser percebido nos mais variados assuntos contemplados no currículo das séries iniciais do ensino fundamental e do 6º ano. Até o 6º ano operações do tipo a – b só podem ser resolvidas se a ≥ b, pois é impossível conceber a ideia de se tirar 7 balas de um pacote que tinha apenas 5 balas.

> A perturbação se instala quando a subtração (a – b) é aplicada a casos em que b > a, gerando um resultado até então inexistente e demonstrando assim o caso típico em que as formas (operações) geram um novo conteúdo. Admitir a realidade

[4] O 7º ano corresponde à antiga 6ª série do Ensino Fundamental de oito anos.

> deste novo resultado implica reconhecer a existência de uma nova classe de números – os negativos (TEIXEIRA, 1993, p. 62).

No conjunto dos números inteiros relativos às concepções que os alunos trazem sobre as operações de adição e subtração simplesmente caem por terra, uma vez que neste conjunto adicionar nem sempre representa um aumento, assim como subtrair nem sempre representa diminuir. Para Teixeira (1993) o conceito de adição deve ser ampliado no conjunto dos números inteiros relativos, não pode mais se limitar a ideia de acrescentar. Da mesma forma, "subtrair inteiros significa trabalhar com operadores negativos, ou seja, números que operam transformações de oposição" (TEIXEIRA, 1993, p. 64). Por exemplo, $-4-(-5)=-4+5$ ou ainda, $-4-(+5)=-4-5$.

Ainda seguindo esta linha de pensamento das operações com números inteiros, a multiplicação no conjunto dos números inteiros, não pode mais ser completamente compreendida como uma adição de parcelas iguais. Para Teixeira (1993, p. 65) a multiplicação com números inteiros relativos encontra um obstáculo: como mostrar que $(-1)\times(-1)=1$?

Neste sentido, para que o aluno consiga lidar com estas situações e possa dominar as operações com números relativos, se faz necessário que ele amplie o seu conceito de número. De acordo com Teixeira: "A construção do conceito de número inteiro, do ponto de vista matemático, é uma ampliação dos naturais, sendo desta perspectiva necessário demonstrar que as leis do sistema de numeração seguem sendo cumpridas" (1993, p. 62).

No contexto da sala de aula, os professores ao apresentarem os relativos aos alunos como medida, associando ao número positivo a ideia de um ganho e ao número negativo a ideia de uma perda, conseguem obter sucesso nas suas aulas e os alunos compreendem facilmente as operações de adição e subtração com esses números. Contudo, este modo de ensinar os números relativos encontra dificuldades quando o professor introduz a multiplicação desses números. Como explicar que uma perda multiplicada por uma perda se transformou num ganho? Exemplificando, $(-2)\times(-3)=+6$.

O que antes era apresentado por meio de situações concretas que poderiam ser vivenciadas e compreendidas pelos alunos, agora na multiplicação precisa ser entendido como uma regra sem relação nenhuma com o que foi aprendido anteriormente.

O modelo comercial, assim denominado por Gleaser (1981), onde os números relativos estão associados à ideia de ganho/perda não tem relação nenhuma com a regra de sinais "menos vezes menos dá mais". No entanto, "como é concreto e ele facilita muito a compreensão dos relativos no início de sua aprendizagem, os alunos o adotam e querem utilizá-lo enquanto não é mais adaptado: não somente, ele não explica mais nada, mas ele não representa mais nada, ele não funciona mais ao nível do símbolo" (VIENNOT, 1985, p. 183).

Neste sentido, "a noção do número negativo só pode ser definido corretamente pelo nível do pensamento formal" (MICHELOT, 1966 *apud* VIENNOT, 1985, p. 183), pois ao contrário, segundo Viennot, não estaríamos introduzindo um falso contrato didático ao utilizarmos um modelo concreto para apresentarmos os números relativos? Quando o professor se utiliza deste modelo comercial ele procura somente facilitar a apresentação e a aprendizagem dos números inteiros relativos, no entanto "[...] esse modelo comercial é tão prático tal que ele é reforçado durante todo o início da aprendizagem que ele se instala definitivamente no espírito do aluno, não mais como um modelo, mas como uma concepção dos relativos" (VIENNOT, 1985, p. 184).

O princípio de extensão e a congruência semântica no ensino da regra de sinais

Glaeser (1981) nos provoca ao dizer que o "bom modelo" utilizado para ensinar as propriedades aditivas, baseado no "modelo comercial" associando a ideia de ganho a um número positivo e ao número negativo ao de uma perda, pode trazer riscos ao ensino das propriedades multiplicativas desses números. Desta forma, o ensino dos números relativos precisa sofrer mudanças, não podendo mais se prender somente nos exemplos baseados em situações cotidianas, haja vista que historicamente o número negativo não surgiu num contexto aritmético, mas sim num contexto algébrico.

> Contudo, o ensino atual dos números inteiros se introduz em um contexto aritmético, tanto nas situações que introduz como nas técnicas que utilizam para resolvê-las, contexto em que não são necessários como estratégia de resolução. Como consequência, o estabelecimento de suas regras de cálculo fica totalmente a mercê do modelo concreto que se utiliza para introduzi-los, e este tratamento didático contribui, todavia ainda mais para agravar o obstáculo epistemológico (CID, 2000, p. 13).

O fato da impossibilidade de calcular uma raiz quadrada negativa no Conjunto dos números Reais contribuiu para que os matemáticos avançassem no cálculo e mantivessem a regra - × - = +. Com essa atitude permitiu-se a criação de um novo número, o imaginário.

> Que essa necessidade imperiosa tenha sido posta em relevo pelas equações de 3º grau, e não pelas do 2º grau (nas quais, porém, o fato da impossibilidade

> analítica já aparecera muitos séculos antes), mostra bem que o progresso da Matemática não se realiza sempre em obediência a um plano lógico de desenvolvimento interno, mas, muitas vezes, pelas pressões exteriores, que a obrigam a procurar, às apalpadelas, o seu caminho (CARAÇA, 1963, p. 161).

Com a engenhosa ideia da criação do símbolo i (unidade imaginária) e da igualdade $i^2 = -1$ foi possível ultrapassar o obstáculo relacionado às raízes de índice par com radicando negativo. Assim, $\sqrt{-9} = \pm 3i$ e como consequência fez-se necessário criar um novo campo numérico, o campo dos Complexos.

Essa capacidade que o homem civilizado, de hoje, tem para fazer generalizações e abstrações, Caraça chama de "princípio de extensão", nas suas palavras:

> [...] o homem tem tendência a generalizar e entender todas as aquisições do seu pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências. Todo o trabalho intelectual do homem é, no fundo, orientado por certas normas, certos princípios. Aquele princípio em virtude do qual se manifesta a tendência que acabamos de mencionar, daremos o nome de princípio de extensão (1963, p. 10).

Este trabalho intelectual do homem orientado por certas normas e princípios, do qual Caraça nos fala foi o que propiciou a ampliação dos conjuntos numéricos. O homem pelas suas generalizações e abstrações conseguiu transpor o pensamento unicamente concreto e ascender ao campo formal das operações. Foi justamente este obstáculo que Hankel (1867 *apud* GLAESER, 1981) conseguiu superar ao mostrar que a explicação para a regra de sinais - × - = + não poderia ser procurada na natureza, e que ela precisaria ser demonstrada formalmente[5].

No processo de ensino e aprendizagem dos números inteiros relativos este processo de generalização também precisa estar presente, uma vez que a descoberta da existência do número negativo está ligada a existência do positivo. Desta forma,

> A compreensão do que seja número negativo avança paulatinamente, por abstrações e generalizações, na medida em que a criança descobre que se negativo é menor do que positivo, há um ponto de onde positivo e negativo se originam. Isso leva, por sua vez, à necessidade de nova ampliação, porque nos naturais a assimilação do zero foi feita com base no significado da ausência de quantidade. Agora, é preciso ampliar este significado, ou seja, diferenciá-lo da concepção de zero origem (TEIXEIRA, 1993, p. 63).

[5] Neste trabalho entendemos como ensino formal aquele que atende aos princípios da consistência interna da matemática, atendendo as regras para a formação de fórmulas e permitindo generalizações.

Da mesma maneira que a concepção do zero precisa ser ampliada, também a concepção das operações de adição, subtração e multiplicação precisam sofrer novas significações no conjunto dos números inteiros relativos. Uma vez que até o 6º ano as crianças são levadas a associar a ideia de adição com a ideia de juntar, a ideia de subtração atrelada a tirar, e por sua vez, a multiplicação é vista como uma adição de parcelas iguais.

No nível de aprendizagem estas ampliações e resignificações das operações dos naturais para os relativos requerem uma atenção especial. Podemos pensar no sentido da congruência semântica apresentada por Raymond Duval através da sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Um dos obstáculos encontrados por muitos alunos nas suas aprendizagens matemáticas está ligado ao fato de que a equivalência referencial destaca-se da congruência semântica. Sobre este assunto introduzido por Duval (1995, 2004, 2012), ele destaca:

> Duas expressões podem ser sinônimas ou referencialmente equivalentes (elas podem "dizer a mesma coisa", elas podem ser verdadeiras ou falsas conjuntamente) e não serem semanticamente congruentes: neste caso há um custo cognitivo importante para a compreensão (2012, p. 100).

Geralmente, quando ocorre a passagem de uma representação semiótica a outro sistema de maneira espontânea diz-se que há congruência semântica. Para isso ela deve, de acordo com Duval (2009, p. 69) atender a três condições:

1. Correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem.
2. Univocidade "semântica" terminal, onde para cada unidade significante elementar de partida, corresponde a uma só unidade significante elementar no registro de chegada.
3. A ordem dentro da organização das unidades significativas de partida é mantida na representação de chegada.

Porém, quando não se cumprem um desses critérios, as representações não são congruentes entre si e a passagem de um sistema de representação a outro não acorre de imediato (DUVAL, 2004, p. 17). Desta forma, o problema da congruência ou da não-congruência semântica de duas apresentações de um mesmo objeto é a distância cognitiva entre essas duas representações. Quanto maior a distância cognitiva, maior será também o custo de passagem de uma representação semiótica a outra, e também maior será o risco do processo matemático não ser efetuado ou entendido pelos alunos.

Vejamos um exemplo que poderá nos ajudar a entender melhor o caso da congruência semântica apresentada por Duval:

$$Paulo\ tem\ 12\ figurinhas\ e\ perdeu\ 5\ em\ uma\ partida.$$

Neste exemplo podemos destacar a identidade entre a frase e a expressão 12 – 5, onde o verbo “perdeu” pode ser facilmente associado à operação de subtração. Percebemos que as ordens da apresentação dos dados numéricos na frase são conservados na mesma ordem da operação. Assim, podemos dizer que existe a congruência semântica entre a frase e a expressão. Neste caso também pode ser notada a equivalência referencial entre a frase e a expressão aritmética.

Porém, na seguinte situação: “No início de uma tarde de inverno de uma cidade da Serra Catarinense, os termômetros registram três graus Celsius e no início da noite os termômetros registraram dois graus Celsius negativos”. Esta frase possui congruência semântica com a expressão (+3) + (-2). Entretanto, a situação e a expressão não são referencialmente equivalentes.

A situação descrita acima não possui congruência semântica com a expressão (-2) – (+3), contudo a situação e a expressão aritmética são referencialmente equivalentes e conduzem a resolução correta do problema. “Duas expressões diferentes podem ser referencialmente equivalentes sem que sejam semanticamente congruentes. Inversamente, duas expressões podem ser semanticamente congruentes sem que sejam referencialmente equivalentes” (DUVAL, 2012, p. 100).

A congruência semântica pode ser percebida na multiplicação dos relativos principalmente quando estes números estão associados ao modelo comercial. Como uma dívida multiplicada por uma outra dívida pode se transformar num ganho? De acordo com Duval o fenômeno da congruência semântica exerce um papel importante no interior de um mesmo registro, mais particularmente, no discurso natural. “Se a formulação da questão é congruente à formulação das informações dadas no enunciado do problema e se essa formulação é também congruente a uma formulação possível da resposta, esta resposta será mais rápida do que no caso da não-congruência” (2012, p. 104).

Segundo Duval (2012), a não-congruência semântica se constitui como uma fonte de dificuldades, para os alunos, independentemente do conteúdo matemático, uma vez que, a

> [...] atividade matemática pode ser bem sucedida se a sua apresentação e seu desenvolvimento não exigirem alguma transformação entre as expressões de formulações ou de representações congruentes e, a mesma tarefa matemática dada como uma variante que implique uma manipulação de dados não-congruentes, pode conduzir ao insucesso (p. 110).

Deste modo, a passagem da frase “o produto de dois números inteiros é + 10” para a expressão “(-2) × (-5)” exige uma manipulação de dados não-congruentes e uma substitutividade inter-registro, passando da linguagem natural para a linguagem numérica[6]. Esta passagem exige um custo cognitivo elevado, o que pode contribuir para um insucesso.

De acordo com Duval, os problemas ligados a substituição inter-registro constituem um interesse particular para o ensino geral da matemática, pois “aprender a articular vários registros de representação da informação e aprender a diferenciar diversos tipos de funcionamentos cognitivos poderão ser uma finalidade do ensino de matemática que se mostra interessante e útil aos não-matemáticos” (2012, p. 116).

Considerações Finais

Historicamente, o processo de consolidação do conceito de número negativo sofreu hesitações. A forma de abordagem para os relativos acontece ainda, na maioria das vezes, pautado no modelo comercial. Esse modelo se instala tão fortemente na concepção dos alunos, a respeito do negativo, que acaba trazendo sérios prejuízos para o ensino das propriedades multiplicativas desses números.

Então, sentimos a necessidade de buscar subsídios teóricos que fundamentassem a nossa proposta de construção e aplicação de uma sequência didática em uma turma de 7º ano, na tentativa de amenizar os obstáculos enfrentados pelos alunos, no que tange o processo de ensino e aprendizagem da regra de sinais para a multiplicação.

Nossa proposta consiste, em consonância com Moretti (2012), em apresentar a regra de sinais para campo aditivo como o modelo do prolongamento dos números naturais

[6] Esta frase pode ser substituída por outros produtos de dois inteiros, mas em todos os casos exigirá uma mudança inter-registro.

para a reta numérica dos inteiros, como sugerido nos PCN (BRASIL, 1998), que não deixa de ser uma aplicação do princípio de extensão.

Para o campo multiplicativo, o modelo baseado no Teorema de Hankel que tem por base a ideia de extensão da propriedade da distributiva dos números positivos para o caso dos números negativos. E, para a operação de subtração aplicamos a regra de sinais da multiplicação como um meio de simplificar as expressões do tipo "$a-(+b)$" e "$a-(-b)$" em "$a-b$" e "$a+b$" para assim poder realizar a soma algébrica na reta dos inteiros como propõe Caraça (1963).

Acreditamos que a apresentação da adição de números inteiros por meio de deslocamentos sobre a reta numérica possa contribuir para o ensino das propriedades multiplicativas desses números. Uma vez que as regras para a adição foram construídas pelos alunos num processo de generalizações através dos deslocamentos realizados sobre a reta numérica.

Deste modo, a regra de sinais para a multiplicação dos inteiros pode ser apresentada sem nenhum constrangimento, pois ela emergirá num processo natural como uma continuidade da adição. A multiplicação de dois números positivos ou de um número positivo por um negativo seguirá a ideia de deslocamentos sobre a reta. E, o produto de dois números negativos, resultar num número positivo, atenderá as regras da consistência interna da própria matemática, como decorrência dos processos de abstrações e generalizações.

Referencias

ALVES, E. L. e MAIA, L. S. L. Multiplicação e Divisão de Números Inteiros: ensino-aprendizagem na EJA. In: Anais do XIII Conferência Interamericana de educação Matemática. Recife: SBEM, 2011. p. 1-11 CD-ROM.

BOYER, Carl. História da matemática. Trad. De Elza Gomide. São Paulo: Blucher, 2010.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5ª a 8ª séries). Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/CEF, 1998.

CARAÇA, Bento J. Conceitos fundamentais da matemática. Lisboa: Bertrand, 1963.

CID, E. Obstáculos epistemológicos em la ensenãnza de los números negativos. Actas de La XV Jornadas Del Seminário Interuniversitario de investigación em Didática de lãs Matemáticas, Boletin Del SI-IDM, 10, 2000.

DIOFANTO DE ALEXANDRIA. La aritmética y el libro sobre los números poligonales. Tomo 1. Trad. de M. B. Muñoz, E. F. Moral e M. S. Benito. Tres canto: Nivola Libros Ediciones, 2007.

DUVAL, R. Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Bern, Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticas y aprendizajes intelectuales**.** Colombia: Peter Lang, 2004.

DUVAL, R. Semióses e pensamento humano. Tradução de L. F. Levy e M. R. A. Silveira. São Paulo : Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. Trad. de Méricles Thadeu Moretti. Revemat: Florianópolis, v. 07, n. 1, p. 97-117, 2012.

EVES, H. Introdução à história da matemática. Tradução : Higyno H. Domingues. Campinas, SP : Editora da UNICAMP, 2004.

GLAESER, George. Epistemologie des nombres relatifs. RDM, v.2.3, 1981.

MORETTI, M. T. A regra dos sinais para a multiplicação: ponto de encontro com a noção de congruência semântica e o princípio de extensão em matemática. Bolema, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42B, p. 691-714, abr. 2012.

NETO, F. R. Duas ou três coisas sobre o “menos vezes menos dá mais”. Trabalho apresentado na *Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática*. UFRPE, 1995.

PASSONI, J. C. (Pré-) Álgebra: introduzindo os números inteiros. Dissertação de Mestrado. PUC/SP, 2002.

PONTES, M. O. Obstáculos superados pelos matemáticos no passado e vivenciados pelos alunos na atualidade: a polêmica multiplicação de números inteiros. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2010.

SCHUBRING, G. Um outro caso de obstáculo epistemológico: o princípio de permanência. Bolema, Rio Claro, Ano 20, n. 28, p. 1-20, 2007.

TEIXEIRA, L. R. M. Aprendizagem operatória de números inteiros: obstáculos e dificuldades. Revista Pró-Posição, v. 4, n. 1[10], UNICAMP, março, 1993.

VIENNOT, D. C. Complexité mathématique et ordre d’aquisition : une hierarchie de conceptions a propos des relatifs. RDM. v. 6, n. 2.3, 1985.