

Trigonometria no Triângulo Retângulo: um estudo com base nas situações didáticas e na construção de conceitos

Paulo Roberto dos Santos¹

Cintia Ap. Bento dos Santos²

GD3 – Educação Matemática no Ensino Médio

Resumo

Este artigo é parte de uma pesquisa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e de Matemática, em fase inicial e em andamento. O objetivo de nossa investigação é entender como se dão as mobilizações e construção de conhecimentos por alunos de um 2º ano do Ensino Médio no estudo de trigonometria, especificamente no triângulo retângulo e suas relações (seno, cosseno e tangente). Como aportes teóricos, utilizaremos a teoria das situações didáticas de Guy Brousseau e a teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud para estruturar nossa pesquisa. Para atender nosso objetivo, utilizaremos uma pesquisa de método qualitativo, com técnica de análise documental, cuja pesquisa de campo se dará com alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de São Paulo. Por meio de uma sequência didática que será desenvolvida com os alunos, procuraremos levantar as concepções dos alunos em relação ao estudo de trigonometria e verificar como eles demonstram mobilizar conhecimentos matemáticos aprendidos no Ensino Fundamental ao resolver tarefas de trigonometria no Ensino Médio e também como realizam a conexão entre conhecimentos novos e antigos. Ao final de nossa pesquisa vislumbramos propor indicativos para o ensino desta noção matemática.

Palavras-chave: mobilização de conhecimentos matemáticos. trigonometria no triângulo retângulo. razões trigonométricas. situações didáticas. campos conceituais.

Introdução e Justificativa

Este artigo tem por objetivo apresentar nossa pesquisa de mestrado que está sendo desenvolvida no âmbito do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática de uma instituição privada da cidade de São Paulo. O foco de nossa investigação é o estudo de trigonometria no que se trata do triângulo retângulo.

¹ Universidade Cruzeiro do Sul / dos-paulo2005@ig.com.br / Mestrando do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

² Universidade Cruzeiro do Sul / cintia.santos@cruzeirodosul.edu.br / Professora Orientadora

Parece-nos evidente que a trigonometria tem grande participação na sociedade moderna. Vários aspectos históricos evidenciam a importância da presença desta noção matemática no desenvolvimento das civilizações antigas como a egípcia, babilônica, chinesa, grega, estendendo-se até os dias atuais. A apropriação e o domínio desse conhecimento matemático constituem instrumentos básicos na leitura e compreensão do mundo em que vivemos. No entanto, com base em nossa prática docente, podemos observar que a maior parte dos alunos chega ao Ensino Médio sem o devido domínio desse conteúdo e também parece que a forma como a trigonometria é aprendida nas aulas de Matemática não proporciona uma visão ampla ao aluno de sua inserção nas situações cotidianas. Outro ponto que verificamos em nossa prática docente é o fato de alunos aprenderem durante o Ensino Fundamental conteúdos como, por exemplo, Teorema de Pitágoras, semelhança de triângulos e funções, porém quando chegam ao Ensino Médio não possuem estes conteúdos disponíveis e nem os reconhecem no momento de fazer as devidas conexões no estudo de Trigonometria.

Podemos citar como exemplo também o estudo das funções trigonométricas, em que há necessidade de alunos articularem simultaneamente conhecimentos geométricos e algébricos, porém mesmo tendo sido estes conteúdos institucionalizados em séries anteriores, os alunos parecem não ter desenvolvido autonomia suficiente para ter seus conhecimentos disponíveis.

Este trabalho visa abrir reflexão quanto à necessidade de se dialogar com as dificuldades que os educandos enfrentam em relação ao domínio e interpretação de conceitos trigonométricos. A apreensão desses conceitos remete ao desenvolvimento da capacidade intelectual e lógica, além de estar associada às aplicações práticas do mundo moderno.

O foco deste trabalho é, sobretudo, o estudo do triângulo retângulo e as relações entre as medidas de seus lados (seno, cosseno e tangente). Em nosso estudo consideramos relevante entender quais as concepções dos alunos em relação ao estudo do triângulo retângulo em se tratando de sua aprendizagem inicial desde o 9º ano do Ensino Fundamental, ou seja, procuraremos compreender a forma como estes alunos têm construído seus conceitos sobre trigonometria desde séries anteriores.

A inclusão da Trigonometria no currículo do Ensino Médio enquanto saber matemático é atualmente um conteúdo obrigatório, presente na escola secundária ao longo de todo o século XX e destacado nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio

(PCNEM) e também presente a Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008), atualmente vigente como currículo da rede estadual de ensino de São Paulo.

Assim, o objeto de estudo desta pesquisa é a aprendizagem de trigonometria (triângulo retângulo) no Ensino Médio. Seu objetivo geral tem por finalidade levantar as percepções que alunos de um segundo ano de Ensino Médio de uma escola pública estadual da cidade de São Paulo têm sobre o conhecimento trigonométrico e como mobilizam tal conhecimento aprendido normalmente no 9º ano do Ensino Fundamental para resolver tarefas e como estes podem ser úteis para construção de novos conhecimentos. Cabe ressaltar que o pesquisador é professor regente desta turma.

Também realizaremos um levantamento sobre pesquisas publicadas nos últimos cinco anos, relacionadas ao foco de nossa pesquisa. Esta etapa tem por objetivo apresentar o que se tem discutido em relação a esta temática no cenário acadêmico.

Nossa pesquisa de campo se dará por meio de uma sequência didática em uma turma do 2º ano do Ensino Médio, em que faremos a análise das dificuldades surgidas em decorrência da implementação da proposta didática e, por fim, faremos sugestões, apontando caminhos e alternativas que conduzam à superação das dificuldades no ensino de trigonometria.

Nosso quadro teórico se faz a luz do referencial teórico na Didática da Matemática mais especificamente a Didática Francesa, em que tomamos como referência a teoria das situações didáticas de Guy Brousseau (2008), pois esta nos permite explicar as relações entre saber, professor e aluno. Também adotamos a teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud (1996, 1998, 2012) a fim de evidenciar as questões relativas à construção de conceitos por parte dos alunos e as relações que alunos estabelecem entre conhecimentos novos e antigos.

Problemática da pesquisa

Com base em nossa justificativa e, buscando delimitar nossa investigação, elaboramos as seguintes questões de pesquisa:

- Quais as concepções dos alunos de um 2º ano de Ensino Médio em relação ao estudo de trigonometria?
- Como alunos demonstram mobilizar conhecimentos matemáticos aprendidos no ensino fundamental ao resolver tarefas de trigonometria no ensino médio?

Metodologia

Para atender nosso objetivo, será realizada uma pesquisa de método qualitativo, com técnica de análise documental.

Lüdke e André (1986) consideram que a pesquisa qualitativa envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes. De acordo com as autoras, a pesquisa qualitativa supõe o contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo investigada, via de regra, por meio do trabalho intensivo de campo.

Lüdke e André (1986) ressaltam, ainda, que nesse tipo de pesquisa, os problemas devem ser estudados no ambiente onde ocorrem naturalmente, sem qualquer manipulação intencional do pesquisador.

Já Creswell (2007) define como sendo uma pesquisa que utiliza diferentes concepções filosóficas, método de coleta, análise, interpretação de dados e estratégias de investigação. Para o autor, a investigação qualitativa utiliza diferentes estratégias, às quais têm influência sobre os procedimentos.

A análise documental será realizada com base em nossos instrumentos de pesquisa a serem desenvolvidos pelos alunos. Em nossa pesquisa os instrumentos elaborados à luz de nosso referencial teórico são considerados documentos, para esta afirmação, nos apoiamos em Philips (1974) que considera como documento “quaisquer materiais escritos que possam ser usados como fonte de informação sobre o comportamento humano” (PHILIPS, 1974, p. 187).

Nossa pesquisa de campo será desenvolvida com uma turma de 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de São Paulo, em que durante um período o pesquisador irá acompanhar a construção de conceitos em relação à trigonometria no triângulo retângulo e como esta construção de conceitos se dá em relação à tríade professor, aluno e saber. Também serão desenvolvidos com os alunos instrumentos para coletar seus conhecimentos prévios em relação às noções matemáticas a serem utilizadas no estudo de trigonometria a fim de verificarmos quais as intervenções são necessárias para que estes alunos possam construir conhecimentos relativos à trigonometria de forma a desenvolver autonomia quanto à utilização das ferramentas matemáticas.

Em um segundo momento, iremos trabalhar um instrumento com os alunos, também elaborado a luz de nossa fundamentação teórica, que consta de uma sequência didática referente ao conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo. Esta sequência didática tem por objetivo fazer evoluir as concepções dos alunos em relação ao estudo desta noção matemática.

Fundamentação teórica

Conforme já mencionado, esta pesquisa fundamenta-se na teoria das situações didáticas de Brousseau (1996, 2008) e na teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996, 1998, 2012). Destacaremos sinteticamente seus aspectos principais, procurando mostrar a importância dessas teorias dentro de nosso contexto de pesquisa.

A teoria de Brousseau (2008) permite compreender as interações sociais que ocorrem dentro da sala de aula, na relação entre alunos, professores e conhecimentos matemáticos, pois o controle e a forma que esses conhecimentos são aprendidos permitiriam reproduzir e aperfeiçoar os processos de conhecimento matemático.

O sistema de interação de um sujeito e um meio específico que determina esses conhecimentos é denominado de situação, sendo considerada didática quando há todo um contexto entorno do aluno, incluídos professor e o sistema educacional. Assim, a teoria das situações objetiva, sobretudo, a situação didática e não o sujeito.

Desse modo, o meio tem um papel fundamental no funcionamento da teoria das situações matemáticas, capaz de provocar no aluno comportamentos a fim de manifestar seu conhecimento, correspondendo às necessidades deste elemento. Segundo Brousseau (2008):

Consideramos o meio como subsistema autônomo, antagônico ao sujeito. [...] a situação didática é todo o contexto que cerca o aluno, nele incluídos o professor e o sistema educacional. [...] Esse dispositivo abrange um meio material – as peças de um jogo, um desafio, um problema, inclusive um exercício, fichas etc. – e as regras de interação com esse dispositivo, ou seja, o jogo propriamente dito. (BROSSEAU, 2008, p.21).

Brousseau (2008) ainda afirma que um meio sem intenções didáticas não é capaz de induzir o aluno a adquirir todos os conhecimentos culturais que se espera que ele obtenha. Então, cabe ao professor regular a relação aluno e meio, organizado-a e estabelecendo as condições que leve o sujeito a “construir” a matemática, por meio de problemas, sem a influência das condições didáticas direcionadas pelo professor.

Pela nossa prática em sala de aula, sabemos das dificuldades que os alunos apresentam em relação ao estudo de Trigonometria referente a conceitos e a suas

mobilizações. Pensando nestas dificuldades adotamos esta teoria como uma forma de nos auxiliar na elaboração de nossos instrumentos de pesquisa e com a finalidade de propor uma sequência de atividades de trigonometria que resulte na apreensão de conceitos por parte dos alunos, levando em consideração que a interação do aluno com o meio proposto seja um elemento facilitador na construção do conhecimento de Trigonometria sem depender apenas da influência direta do professor. Normalmente o professor seria visto como um transmissor de informações na relação didática. Nesta nova postura, ele tem um papel fundamental que é iniciar um conhecimento científico no aluno por meio do que Brousseau (2008) denominou situações de ensino propícias.

A sequência de atividades trigonométricas intencionalmente elaboradas objetiva ser o primeiro trabalho do professor, dentro da teoria das situações sendo sintetizada, segundo Brousseau (1996), como: “propor ao aluno uma situação de aprendizagem para que (este) elabore seus conhecimentos como resposta pessoal a uma pergunta, e os faça funcionar ou os modifique como resposta às exigências do meio e não a um desejo do professor” (BROSSEAU, 1996, p.49). Portanto, à luz desta teoria, a ideia é caracterizar uma situação didática, estabelecendo um conjunto de relações entre professor, alunos e o saber, em certo meio, com a intenção de possibilitar a aprendizagem de determinado conhecimento.

O aluno também tem relações com o denominado meio adidático. Conforme Brousseau (2008) esse meio é denominado adidático, pois considera o funcionamento normal dos conhecimentos, fora das condições didáticas (aquelas em que alguém decidiu pelo aluno que saber ele deveria aprender). Na situação adidática, a devolução é uma etapa inicial pela qual o professor transfere responsabilidades ao aluno. Para Brousseau (2008) a devolução é o ato pelo qual o professor faz com que o aluno aceite a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (adidática) ou de um problema, assumindo ele mesmo as consequências dessa transferência.

Portanto, há uma mudança de procedimento por parte do professor e do aluno, o professor deixa de ter o controle pedagógico sobre o aluno que passa a trabalhar de forma efetiva e autônoma na construção de seu próprio conhecimento, mobilizando as informações, fazendo inferências e se apropriando de seu conhecimento. Nesta nova postura metodológica, o professor não fica alheio à situação, mas deve incentivar o aluno em direção de sua aprendizagem, por seu próprio esforço e meios, proporcionando nesta fase situações enriquecedoras.

A partir da devolução, fase inicial em que o aluno aceita a responsabilidade do problema, temos as etapas classificadas por Brousseau (2008) de ação, formulação e validação e institucionalização. Essas sucessões de situações unidas podem acelerar as aprendizagens e levar à construção do saber. As intervenções do professor nas fases de ação, formulação e validação são praticamente nulas, entretanto, a institucionalização fica sob sua responsabilidade.

A fase de ação se caracteriza pelo predomínio do aspecto experimental e pela produção de um conhecimento de natureza operacional, os alunos apresentam uma solução sem a preocupação de justificá-la ou explicitar como chegou a tal solução.

Na fase de formulação, o aluno troca informações com o meio por meio de uma linguagem adequada, ou seja, procura explicar sua resposta na forma escrita ou oral.

A fase de validação se caracteriza pela veracidade das afirmações através de provas e demonstrações, por meio de linguagem matemática apropriada.

A fase de institucionalização tem por objetivo estabelecer um caráter de objetividade e universalidade ao conhecimento, conduzida pelo professor, através da formalização e generalização.

Assim, no planejamento do nosso trabalho, buscamos levar em conta todos esses aspectos no desenvolvimento das atividades de trigonometria e na organização dos trabalhos em sala de aula.

Também nos apoiamos na teoria de Vergnaud (1996, 1998, 2012) sobre os campos conceituais. A escolha por este quadro teórico para fundamentar a elaboração de nossa pesquisa se deu porque para Vergnaud (2012) parte de nosso conhecimento é resultante de habilidades e a utilização da linguagem é especialmente importante para realizar a simbolização e a conceitualização. Outro ponto que nos chama atenção na teoria dos campos conceituais é que para Vergnaud (2012) o desenvolvimento do conhecimento de matemática não pode se reduzir ao desenvolvimento das operações lógicas. Esta teoria vai nos ajudar no entendimento de como alunos constroem conceitos e como fazem as conexões entre conhecimentos novos e antigos.

Segundo Vergnaud (1996), a principal finalidade da teoria dos campos conceituais é fornecer um quadro que permita a compreensão das filiações e rupturas entre conhecimentos novos e antigos nas crianças e nos adolescentes.

Em sua teoria Vergnaud (1996, 2012) se refere a campos conceituais porque para ele um conceito depende de várias situações e uma situação depende de um conjunto de conceitos, pois uma situação não se forma a partir de um único conceito.

O autor considera que essa teoria não é específica da matemática, mas foi inicialmente elaborada com o intuito de desvendar o processo de conceitualização progressiva das estruturas aditivas e multiplicativas, além das relações número-espço, pertencentes à álgebra.

Para Vergnaud (2009), aprendemos e nos desenvolvemos em qualquer idade, em que um indivíduo é capaz de se adaptar às situações por meio de uma evolução da organização de sua atividade. Sobre a atividade em situação realizada pelo indivíduo, Vergnaud (2009) defende que:

[...] a análise da atividade em situação é um meio essencial para compreender os processos de aprendizagem, por mais delicada e difícil que ela seja. Ela passa notadamente pela análise dos erros, das hesitações e dos desfuncionamentos, assim como pela identificação das diferentes etapas pelas quais se constrói uma forma nova de organização da atividade. (VERGNAUD, 2009, p. 14)

Com base na citação anterior, e aproximando-a do contexto de nossa pesquisa, podemos compreender que, quando analisamos a atividade em situação, ou seja, os procedimentos, ações e representações realizadas pelo aluno, conseguimos verificar em que etapa se dá a aprendizagem deste, onde devemos observar e analisar os erros, os acertos e também as dificuldades demonstradas. A partir dessa análise é possível perceber como o aluno organiza sua atividade por meio dos esquemas, e isso pode ajudar professores a elaborar estratégias de ensino mais efetivas para a aprendizagem de seus alunos.

Vergnaud (1996) define como esquema a organização invariante da conduta para uma dada classe de situações, onde o autor afirma ser nos esquemas que se deve procurar os elementos cognitivos que permitem à ação do sujeito ser operatória, ou seja, cada esquema tem haver com um variedade de situações (Vergnaud, 2012).

Vergnaud (1996) considera também que um conceito não pode ser reduzido à sua definição, pois é por meio das situações e dos problemas a resolver que um conceito ganha sentido diante dos alunos. O pesquisador considera um importante ponto o paradoxo que há na ideia de ruptura entre conhecimentos anteriores e os novos conhecimentos aprendidos (Vergnaud, 2012).

Resultados esperados

Este trabalho encontrar-se em início da elaboração dos instrumentos de coleta de dados, mas esperamos que este trabalho possa identificar as dificuldades apresentadas pelos alunos do Ensino Médio relacionados ao ensino de Trigonometria, contribuindo como um elemento facilitador na metodologia de aprendizagem à luz da teoria das situações didáticas e dos campos conceituais. A partir do estudo já realizado em relação as teorias de nossa fundamentação já nos é possível entender o funcionamento de algumas dificuldades de apropriação e mobilização de conceitos trigonométricos por parte dos alunos e também inferir que elas podem vir a ser superadas quando o professor passa a entender as relações em que acontece o ensino e a aprendizagem deste objeto matemático e a partir disso pode procurar modificar suas práticas de ensino. Vislumbramos por meio de nossas leituras que algumas das dificuldades apresentadas pelos alunos ao resolver determinadas tarefas de Trigonometria no triângulo retângulo podem advir das necessidades de mobilização de conhecimentos aprendidos em séries anteriores como razão, proporção, semelhança, etc.

Acreditamos que a compreensão do quadro da conexão entre os conhecimentos novos e antigos podem nos fornecer indícios para o entendimento das dificuldades e que a conceitualização não ganha sentido senão diante de boas propostas de situações, imaginamos que por meio da análise das situações de aprendizagem dos alunos é que podemos compreender os processos de aquisição de conhecimentos. Uma proposta de aprendizagem que não leve em consideração as possíveis dificuldades dos alunos, corre o risco de ser limitada. Portanto, a partir desses pressupostos acreditamos que o nosso referencial teórico e o desenvolvimento de nossa pesquisa de campo com alunos de um 2º ano do Ensino Médio, possa colaborar de alguma forma apontando caminhos metodológicos que possibilitem aos alunos uma aprendizagem mais efetiva.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio** – Brasília: Ministério da Educação, 1999.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. Trad. Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 2008. 128 p.

BROUSSEAU, G. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (org). **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 48-72.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa**: métodos qualitativo, quantitativo e misto. Trad. Luciana de Oliveira da Rocha. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. Pesquisa em educação : Abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

PHILLIPIS, B. S. **Pesquisa social**: estratégias e táticas. Rio de Janeiro, Livraria Agir Editora, 1974.

SÃO PAULO. Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo**: Matemática (Ensino Fundamental e Médio). Coord. Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2008.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais. In BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 155-191.

VERGNAUD, G. A comprehensive theory of representation for mathematics education. **Journal of Mathematical Behavior**, 1998. p. 167-181.

VERGNAUD, G. O que é aprender?. In BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Org.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais**. Curitiba: CRV, 2009. p. 13-35.

VERGNAUD, G. Construção do conhecimento matemático e a teoria dos campos Conceituais (conferência). **Anais...** 3º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – SIPEMAT. Fortaleza/CE, 2012.