

O Ensino da Combinatória

por meio da Construção de Árvores de Possibilidades

com e sem o uso do *software Diagramas de Árbol*

Juliana Azevedo¹

Rute Borba²

GD6 – Educação Matemática, Tecnologias Informáticas e Educação à Distância

Resumo:

A presente pesquisa visa analisar a influência da construção de árvores de possibilidades, com e sem o uso de um *software* educativo, na aprendizagem da Combinatória. Participaram 40 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, separados em quatro grupos de 10 alunos, formando dois grupos experimentais e dois grupos controle. Foi realizado um pré-teste, seguido de distintas formas de intervenção e, finalmente, um pós-teste, que avaliou os avanços obtidos através das intervenções realizadas. Em seguida, foi aplicado, após nove semanas, um pós-teste posterior para verificar a retenção do aprendizado. Os alunos que construíram árvores de possibilidade, com e sem uso do *software Diagramas de Árbol*, avançaram em seus raciocínios combinatórios, mas o grupo de lápis e papel teve um avanço maior, quando comparado com os dois grupos controle, tanto no primeiro quanto no segundo pós-teste. O trabalho com árvores de possibilidades pode resultar em boa estratégia de ensino para alunos de anos iniciais, sendo, entretanto, necessário um trabalho mais extenso com o *software* para resultar em melhores efeitos no aprendizado.

Palavras-chave: Combinatória. Árvores de possibilidades. Software Diagramas de Árbol. Anos iniciais do Ensino Fundamental.

1 O SOFTWARE DIAGRAMAS DE ÁRBOL NO ENSINO DA COMBINATÓRIA

Na Matemática os diversos assuntos abordados podem ser trabalhados fazendo uso de ferramentas variadas. Isso não é diferente com um conteúdo em especial – a Combinatória. Este conteúdo é, geralmente, estimulado ou visto em sala de aula, somente no Ensino Médio por meio de uso direto de fórmulas e abordado em menor extensão no Ensino Fundamental – de maneira não sistemática. Porém, a aprendizagem nos anos iniciais, apesar de não ser indicado o uso de fórmulas, pode acontecer por meio de estratégias sistemáticas variadas, que não visem a formalização.

Dentre as variadas ferramentas que possibilitam explorar a Combinatória e desenvolver seus conceitos têm-se os variados recursos tecnológicos. Com esses recursos pode-se deparar

¹ Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (Edumatec) da Universidade Federal de Pernambuco e integrante do Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório (Geração) – azevedo.juliana1987@gmail.com

² Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco (Edumatec) e líder do Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório (Geração) – borba@talk21.com

com situações que exijam fazer certas articulações entre o intuitivo e o concreto. Dessa forma, o aluno, por meio do uso da tecnologia, poderá manusear quase concretamente as situações.

A partir do estudo de Sandoval, Trigueiros e Lozano (2007), foi possível localizar o *software Diagramas de Árbol*³ (AGUIRRE, 2005). Este *software* foi analisado por Leite, Pessoa, Ferraz e Borba (2009) e utilizado por Ferraz, Borba e Azevedo (2010) e Azevedo, Costa e Borba (2011) em estudos com finalidade de investigar o aprendizado da Combinatória por meio deste recurso. Em função destes estudos, destaca-se que este *software*, através do diagrama de *árvore de possibilidades*, favorece a aplicação com crianças de nível inicial de escolarização, pois fornece todas as possibilidades de combinação, sejam elas válidas ou não, em todos os tipos de problemas (*produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação*).

Leite, Pessoa, Ferraz e Borba (2009) enfatizam que deve-se explorar “logo no início da introdução ao raciocínio combinatório, as representações para depois introduzir a formalização [...]” oportunizando “[...] o uso de diferentes tipos de representações, como: árvores de possibilidades, tabelas, forma pictórica, diagramas, etc., ao invés de propor somente a fórmula como forma de representação”. Sendo assim, é importante que o *software* seja utilizado anteriormente às fórmulas, aproveitando o caráter lúdico das suas representações, como é o caso do *software Diagramas de Árbol* (Figura 1).

Figuras 1 – Tela de abertura do *software Diagramas de Arbol*. (AGUIRRE, 2005) e tela de escolha do tipo de árvore a ser construída.



Fonte: Software Diagramas de Árbol (AGUIRRE, 2005)

O referido *software* possui ainda uma segunda tela em que é possível escolher o tipo de árvore a ser construída pelo *software*. São duas opções, como é possível visualizar na Figura 1 A primeira opção é a árvore com níveis de elementos diferentes e a segunda

³ O *software Diagramas de Árbol* foi desenvolvido por Aguirre (2005) e disponibilizado para uso do GERAÇÃO pelas autoras do estudo mexicano, Sandoval, Trigueiros e Lozano (2007).

opção é a árvore com níveis de elementos iguais. Nesta pesquisa todas as questões foram trabalhadas com a construção de árvores com níveis de elementos diferentes. Entretanto, os problemas também podem ser resolvidos por meio da construção de árvores com níveis de elementos iguais com exceção dos problemas do tipo *produto cartesiano*.

Cada tipo de problema combinatório tem características específicas, sendo que cada tipo pode ser resolvido por meio da análise de diagramas de árvores. Na terceira tela do *software Diagramas de Árbol* é possível escolher os níveis e inserir os elementos que a pergunta da questão de Combinatória sugere e, a partir daí, é possível visualizar na tela seguinte todas as possibilidades para a resolução da questão. Para exemplificar como o *software* trabalha problemas combinatórios, será usada a primeira questão do teste aplicado aos participantes do presente estudo. A questão é referente ao tipo de problema *produto cartesiano*.

Numa lanchonete há três tipos de suco (laranja, morango e abacaxi). Eles são servidos em copos de dois tamanhos (pequeno e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco de um sabor e um tamanho de copo?

No *software* os níveis da situação são os conjuntos de sucos e copos e os elementos são todos os objetos dos conjuntos, simbolizados pelas características (sabor e tamanho) de cada suco e copo. Gera-se, nesse caso, um total de seis possibilidades (Figura 2).

Figuras 2 – Tela de escolha de níveis e elementos no *Diagramas de Árbol* e árvore de possibilidades no *Diagramas de Árbol* (caso de um *produto cartesiano*).



Fonte: *Software Diagramas de Árbol* (AGUIRRE, 2005)

Nos demais tipos de problemas (*combinação, arranjo e permutação*) o aluno precisa validar (pintando de vermelho) os casos possíveis. O *software* executa a ação de apresentar todos os casos, mas cabe ao usuário analisar e destacar, de alguma forma, os casos válidos, como é possível visualizar na Figura 3, a seguir, em referência ao seguinte problema do tipo arranjo:

Três crianças (Pedro, Márcia e Léo) estão disputando uma corrida no PlayStation. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o 1º e 2º lugares?

Figuras 3 – Tela de escolha de níveis e elementos no *Diagramas de Árbol* e árvore de possibilidades no *Diagramas de Árbol* (caso de um *arranjo*).



Fonte: *Software Diagramas de Árbol* (AGUIRRE, 2005)

Pelo exposto, o *software Diagramas de Árbol* foi escolhido para o processo de intervenção do estudo aqui relatado por possibilitar o trabalho com os diversos tipos de problemas combinatórios, por permitir a análise de semelhanças e diferenças entre as situações combinatórias, por usar uma representação válida para todos os tipos e por não estimular o ensino de fórmulas.

Além disso, alguns estudos demonstraram grande avanço do raciocínio combinatório com crianças e adolescentes com idades entre 10 e 13 anos por uso do *software Diagramas de Árbol*. Estas pesquisas anteriores dão respaldo ao atual estudo que se diferencia dos demais principalmente por propor uma comparação entre alunos dos anos iniciais que usaram, ou não, o *software*.

Sandoval, Trigueiros e Lozano (2007) propuseram a aprendizagem da Análise Combinatória utilizando o *software Diagramas de Árbol* com 25 crianças mexicanas de 11 a 13 anos. Essas autoras observaram o avanço, principalmente, quanto à escolha de estratégias de resolução mais eficientes.

Ferraz, Borba e Azevedo (2010), aplicaram um teste em que alunos do 7º ano do Ensino Fundamental deveriam resolver as situações, ora utilizando o *software Diagramas de Árbol*, ora utilizando apenas o lápis e papel. Em entrevistas com alguns dos alunos participantes da pesquisa, foi possível destacar a organização que o *software* oferece na resolução dos problemas combinatórios. Entretanto, os alunos também enfatizam que o *software* apresenta algumas dificuldades, elencadas pelas autoras como: a não apresentação de *feedback* e dificuldades quanto à não visualização de todas as possibilidades. As autoras

notaram que, com alunos dos anos finais de escolarização, a árvore de possibilidades pode ser uma excelente estratégia para a compreensão de problemas combinatórios tanto com a utilização do *software* quanto com o uso apenas do lápis e papel.

Azevedo, Costa e Borba (2011), em estudo de intervenção com uso do *software Diagramas de Árbol* com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental observaram que o uso do *software* proporcionou avanços em todos os tipos de problemas combinatórios, porém como menos resultados favoráveis para as situações de *permutação*. As autoras destacam que o *software* auxilia no aprendizado, porém havia a necessidade que o professor apontasse os principais aspectos de cada tipo de questão, ou seja, se todos os elementos devem ser usados e se a ordem deles pode influenciar, ou não, no resultado.

Borba e Azevedo (2012) destacaram um estudo de caso com uma dupla de alunas participantes da pesquisa realizada por Azevedo, Costa e Borba (2011). Essas alunas, que inicialmente demonstraram pouco conhecimento em situações combinatórias, após duas sessões de intervenção com o uso do *software* já mencionado, passaram à quase totalidade de questões respondidas corretamente. Em suas respostas, as alunas apresentavam a compreensão dos invariantes das diferentes situações combinatórias.

Dessa forma, o presente estudo, visa ampliar achados de estudos anteriores, verificando como o uso de árvores de possibilidades, produzidas virtualmente ou em lápis e papel, oferece influência no aprendizado da Combinatória com alunos dos anos iniciais de escolarização. Um caráter inovador da pesquisa é a inclusão da comparação de desempenhos entre os usuários de *software* e os que construirão manualmente as árvores de possibilidades, bem como a existência de um grupo controle para verificar a necessidade de instrução específica para o desenvolvimento do raciocínio combinatório e um grupo controle desassistido para observar se a maturidade é suficiente para promover avanços.

2 MÉTODO

2.1 Objetivos

4.1.1 Objetivo Geral

- Analisar a influência da construção de árvores de possibilidades na compreensão de problemas combinatórios.

4.1.2 Objetivos Específicos

- Investigar o efeito das intervenções em Combinatória, com e sem o uso do *software*, por meio da construção de árvores de possibilidades.

- Verificar os desempenhos de alunos em relação aos tipos de problemas combinatórios em diferentes grupos de intervenção.

4.2 Procedimentos

O presente estudo foi realizado com 40 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental de duas escolas da rede pública Municipal do Recife. Foi realizado, em ambas as escolas, inicialmente um pré-teste, seguido de distintas formas de intervenção e, finalmente, um pós-teste imediato, que avaliou os avanços obtidos através das intervenções realizadas. No pré-teste, como pode ser visto a seguir no Quadro 1, os alunos responderam oito situações-problema de Combinatória, sendo duas questões para cada tipo de problema: *produto cartesiano*, *arranjo*, *combinação* e *permutação*.

Quadro 1: Lista de problemas do pré-teste (todos os grupos) e intervenção (Grupos 1 e 2)

Produto Cartesiano:

1. Numa lanchonete há três tipos de suco (laranja, morango e abacaxi). Eles são servidos em copos de dois tamanhos (pequeno e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco de um sabor e um tamanho de copo?
2. Para entrar no parque de diversões, João pode passar por quatro portões de entrada (A, B, C e D). Depois que João se divertir nos brinquedos do parque, ele poderá ir para casa passando por seis saídas diferentes (E, F, G, H, I e J). De quantas maneiras diferentes ele poderá entrar e sair do parque?

Combinação:

3. Na loja de bichos de estimação há para vender três animais (um cachorro, um passarinho e uma tartaruga). Marcelo quer comprar dois bichinhos. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos?
4. Márcia tem em casa sete frutas (mamão, pera, abacaxi, laranja, banana, jaca e uva) e quer fazer uma salada usando duas dessas frutas. De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas?

Arranjo:

5. Três crianças (Pedro, Márcia e Léo) estão disputando uma corrida no *Play Station*. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o 1º e 2º lugares?
6. Edinho tem alguns carrinhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar cinco letras (X, Y, Z, K e W) e vai escrever duas letras em cada placa. Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que as letras se repitam?

Permutação:

7. De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?
8. Tenho quatro bolas nas cores verde, marrom, amarela e rosa. Comprei uma caixa com quatro compartimentos e quero colocar cada bola em um desses compartimentos. De quantas maneiras diferentes posso organizar a caixa?

Fonte: Azevedo, Costa e Borba, 2011 (Adaptado)

A partir dos resultados encontrados no pré-teste foram formados quatro grupos distintos com os alunos distribuídos nesses grupos de acordo com seus acertos. Isso buscava garantir que os grupos partiriam de uma mesma média de nível inicial. O primeiro grupo trabalhou com o *software Diagramas de Árbol* – no qual são construídas árvores de possibilidades; o segundo construiu árvores de possibilidades com lápis e papel; e o terceiro grupo (Grupo Controle assistido – com intervenção) trabalhou problemas multiplicativos (excluindo-se os de Combinatória). Houve ainda a participação do quarto grupo, considerado um Grupo Controle desassistido.

As questões que foram propostas na intervenção para os alunos do terceiro grupo foram baseadas na classificação de problemas multiplicativos sugerida por Nunes e Bryant (1997). Desta forma, a lista de questões destinada a este grupo, foi composta por oito situações-problema, sendo duas questões para o tipo *multiplicação*, duas questões do tipo *problema inverso da multiplicação*, duas questões para *relação entre variáveis – covariação* – e duas questões de *distribuição*. O único tipo de problema, abordado por Nunes e Bryant (1997), que não foi visto por esse grupo é o de *produto cartesiano*, uma vez que está relacionado à ideia de Combinatória, que não foi abordada por este grupo.

Após poucos dias do processo de intervenção foram aplicadas as questões referentes a um pós-teste imediato, objetivando verificar os avanços obtidos por meio das intervenções realizadas. Nove semanas após os processos de intervenção foi realizado um pós-teste posterior com 38 alunos dos 40 alunos presentes até o pós-teste imediato⁴. Os problemas do pós-teste imediato e do pós-teste eram semelhantes às do pré-teste.

Foi realizada a análise quantitativa das questões acertadas pelos 40 alunos da pesquisa, diferenciando-se o quantitativo das questões acertadas no pré-teste e nos pós-testes (imediato e posterior), comparando-se os acertos dos quatro grupos distintos antes e depois dos processos de intervenção, bem como comparando-se os desempenhos entre os grupos. Essa análise foi realizada por meio do *software Statistical Package for the Social Sciences – SPSS*.

3 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Após a aplicação do pré-teste foi decidido classificar o erro e o acerto das crianças segundo alguns critérios de pontuação, para qualificar o desempenho além de mero erro ou

⁴ Destaca-se que no pré-teste e no pós-teste imediato havia 40 alunos participantes da pesquisa, e no pós-teste posterior havia 38 alunos. Isso porque dois alunos não estavam mais na mesma escola após o mínimo de oito semanas que deveriam ser esperadas entre o pós-teste imediato e o pós-teste posterior.

acerto pleno. A pontuação foi dividida em cinco níveis crescentes, iniciando pelo erro do aluno, passando por acertos parciais e terminando no acerto total da questão. No Quadro 2, é possível visualizar cada nível de classificação e seu respectivo exemplo.

Quadro 2: Níveis crescentes de pontuação por tipo de resposta

Tipo de resposta	Pontuação	Nível de Classificação
Resposta errada	0 ponto	Não apresenta relação com Combinatória, ou seja, na sua resolução a criança não aponta indícios de compreensão do problema proposto (Figura 4)
Resposta parcialmente correta 1	1 ponto	Escolhe apenas um caso, ou seja, a criança escolhe apenas uma possibilidade, não indicando perceber que podem existir outras (Figura 5)
Resposta parcialmente correta 2	2 pontos	Enumera alguns casos, ou seja, percebe que pode haver mais de um caso, mas limita os casos ao número de elementos dados no problema (Figura 6)
Resposta parcialmente correta 3	3 pontos	Enumera alguns casos, ou seja, percebe que pode haver mais de um caso, não limita ao número de elementos dados, mas não consegue esgotar todas as possibilidades (Figura 7)
Resposta correta	4 pontos	Esgota todas as possibilidades, ou seja, acerta a questão apontando todas as possibilidades da questão (Figura 8)

Figura 4 – Resposta errada do Aluno 28 para a Q8 do Pré-teste

8. Quantas palavras, com e sem sentido, podem ser formadas com as letras da palavra AMOR?

Resposta: Roma, mulher, oropos e almanaque.

Fonte: Autoras mediante pesquisa de campo

Figura 5 – Resposta parcialmente correta 1 do Aluno 32 para a Q5 do Pré-teste

5. Três crianças (Pedro, Márcia e Léo) estão disputando uma corrida no Play Station. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o 1º e 2º lugares?

Resposta: QUEM PODE FICAR EM PRIMEIRO É LÉO E SEGUNDO PEDRO.

Fonte: Autoras mediante pesquisa de campo

Figura 6 – Resposta parcialmente correta 2 do Aluno 22 para a Q6 do Pré-teste

6. Edinho tem alguns carrinhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar cinco letras (X, Y, Z, K e W) e vai escrever duas letras em cada placa. Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que as letras se repitam?

Resposta: junta-se X e Y Z e K e W Fica 5

Fonte: Autoras mediante pesquisa de campo

Figura 7 – Resposta parcialmente correta 3 do Aluno 6 para a Q6 do Pré-teste

6. Edinho tem alguns carrinhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar cinco letras (X, Y, Z, K e W) e vai escrever duas letras em cada placa. Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que as letras se repitam?

XY - ZK - KW - KX - ZX

Resposta: são 5 maneiras

Fonte: Autoras mediante pesquisa de campo

Figura 8 – Resposta correta do Aluno 15 para a Q1 do Pré-teste

1. Numa lanchonete há três tipos de suco (laranja, morango e abacaxi). Eles são servidos em copos de dois tamanhos (pequeno e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco de um sabor e um tamanho de copo?

(L+G) (ou) (L+P)
(M+G) (ou) (M+P)
(A+G) (ou) (A+P)

Resposta: 6 tipos

Fonte: Autoras mediante pesquisa de campo

Com os grupos formados, deu-se início às distintas intervenções e a posterior aplicação dos pós-testes, imediato e posterior. Assim, na Tabela 1 observa-se o desempenho dos alunos participantes dos diferentes grupos nas distintas etapas do estudo. É possível perceber que os alunos dos grupos com intervenção específica em Combinatória avançaram em seus conhecimentos sobre este conteúdo. Ainda observando a Tabela 1 percebe-se o maior avanço do Grupo 2 em relação ao Grupo 1. Esse desempenho um pouco superior do Grupo 2 pode estar relacionado ao fato de que os alunos deste segundo grupo resolveram as situações utilizando a mesma representação (lápiz e papel) adotada no pré-teste e

nos pós-testes, enquanto os alunos do Grupo 1 resolveram as situações por meio de um *software* e no pós-teste tiveram que utilizar outra forma de representação: o lápis e papel.

Tabela 1: Média de desempenho Pré-teste X Pós-teste imediato X Pós-teste posterior

	Pré-Teste	Pós-Teste Imediato	Pós-Teste Posterior
Grupo 1 (Árbol)	4,6	11,50	12,89
Grupo 2 (Lápis e papel)	4,8	14,70	16,11
Grupo 3 (Controle – Est. Mult.)	4,7	4,10	5,2
Grupo 4 (Controle - desassistido)	4,8	2,8	4,0

O Grupo 3, composto pelos alunos que fizeram parte do grupo controle assistido – com aulas de estruturas multiplicativas – manteve, nos pós-testes, a sua média de acertos em comparação com o pré-teste, como ainda pode ser visto na Tabela 1. Dessa forma, observa-se que trabalhar problemas multiplicativos, mas não combinatórios, em nada parece auxiliar o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

O Grupo 4, que foi formado pelos alunos que não receberam nenhum tipo de instrução, diminuiu um pouco o seu rendimento ao se comparar a média dos resultados no pré-teste e nos pós-teste destes alunos. Nenhuma instrução, não só não teve influência positiva no desempenho, como parece ter provocado um efeito negativo.

Por meio da prova paramétrica t-teste de amostras em pares, foi possível destacar que ambos os grupos com intervenção em Combinatória apresentam diferenças significativas⁵ de desempenhos entre pré-teste e os pós-testes imediato e posterior, avançando substancialmente em seus conhecimentos combinatórios. O Grupo 1, quando comparado o pré-teste e o pós-teste imediato dos seus respectivos alunos foi observado uma diferença significativa de $p=,015$. E na comparação do pré-teste com o pós-teste posterior obteve uma diferença significativa de $p=,020$. Já no Grupo 2, neste mesmo panorama de comparação, foi observada uma diferença significativa com o pós-teste imediato de $p=,011$ e com o pós-teste posterior de $p=,010$. Isso não acontece na comparação do pré-teste com os pós-testes imediato e posterior do Grupo 3, $p=,509$ e $p=,668$, respectivamente, e do Grupo 4, $p=,271$ e $p=,669$, respectivamente.

Utilizando a prova paramétrica ANOVA com post hoc Tukey, foi observada diferença significativa do Grupo 1 quando comparado com Grupo 4 no pós-teste imediato

⁵ Nesta pesquisa foi considerado índice de significância $p<,05$

(G1XG4: $p=,040$), mas não com o Grupo 3 (G1XG3: $p=,102$). No pós-teste posterior o Grupo 1 não apresentou diferenças significativas com nenhum outro grupo. Foi observado um maior avanço do Grupo 2, uma vez que nesse grupo foram identificadas diferenças significativas quando comparado com ambos os grupos controle no pós-teste imediato (G2XG3: $p=,009$; G2XG4: $p=,003$), e no pós-teste posterior (G2XG3: $p=,025$; G2XG4: $p=,011$). Foi identificado ainda que não houve diferenças significativas na comparação dos Grupos 3 e 4 entre si no pós-teste imediato e posterior, respectivamente (G3XG4 pós-teste imediato: $p=,975$ e G3XG4 pós-teste posterior: $p=,986$), nem dos Grupos 1 e 2 entre si no pós-teste imediato e posterior respectivamente (G1XG2 pós-teste imediato: $p=,736$ e G1XG2 pós-teste posterior: $p=,824$).

4 CONCLUSÕES

Diante do que foi apresentado e analisado, conclui-se que alunos que constroem árvores de possibilidade, com e sem uso do *software Diagramas de Árbol*, podem avançar em seus raciocínios combinatórios. Os dois grupos que construíram árvores demonstraram melhores desempenhos em ambos os pós-testes (imediato e posterior), comparado ao teste respondido antes da intervenção. O Grupo 2 (com intervenção em lápis e papel) obteve um melhor rendimento quanto comparado com o Grupo 1 (com intervenção no *software Diagramas de Árbol*), mas este melhor desempenho não refletiu-se em uma diferença estatisticamente significativa entre esses grupos.

O Grupo 2 apresentou diferenças significativas quando comparado com ambos os grupos controle e o Grupo 1 apenas apresentou diferença significativa quando comparado com o Grupo 4 no pós-teste imediato. No pós-teste posterior o Grupo 1 não apresentou diferenças significativas com nenhum dos grupos controle.

Acredita-se que isto pode ser influência da necessidade de transferência de representação que os alunos que trabalharam com o *software* tiveram, ou seja, os alunos aprenderam no *software* e precisaram responder ao pós-teste usando o lápis e o papel, enquanto que os alunos do Grupo 2 aprenderam Combinatória na mesma representação em que o teste foi realizado. Acredita-se, ainda, que o maior esforço cognitivo exigido dos alunos do Grupo 2 para a resolução das situações, possa ter influenciado neste resultado, uma vez que, esses alunos precisavam listar e decidir todos os casos possíveis, enquanto que os alunos do Grupo 1 já obtinham por meio do *software* toda a listagem já pronta, tendo apenas que decidir os casos possíveis para a resolução da situação. Entretanto,

também é possível destacar que um maior tempo dedicado à familiarização dos alunos com o *software* poderia melhorar o desempenho dos alunos na resolução dos pós-testes, como foi feito no estudo de Azevedo, Costa e Borba (2011) e Azevedo e Borba (2012).

Dessa forma, este estudo revela que o trabalho com árvores de possibilidades, seja por meio de *software* ou com resolução de problemas em lápis e papel, pode resultar em boa estratégia de ensino com alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, uma vez que houve importantes diferenças na comparação com os grupos controle, principalmente com o Grupo Controle desassistido. Assim, apenas tratar problemas multiplicativos ou esperar que os alunos amadureçam seus raciocínios não são suficientes para o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Intervenções são necessárias e o uso de árvores de possibilidades demonstrou-se um excelente recurso de ensino.

Com essa pesquisa contribui-se para a reflexão sobre melhores possibilidades de ensino da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental ao apontar, assim como já apontado para os anos finais com a pesquisa de Ferraz, Borba e Azevedo (2010), o uso de árvores de possibilidades como recurso que permite que os alunos observem diferentes relações e propriedades de distintas situações combinatórias.

REFERÊNCIAS

AGUIRRE, C. **Diagrama de Árbol**. Multimedia. 2005.

AZEVEDO, J.; COSTA, D.; BORBA, R. O impacto do software Árbol no raciocínio combinatório. **Anais...** XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM/IACME, Recife, Brasil. 2011

BORBA, Rute; AZEVEDO, Juliana. A construção de árvores de possibilidades com recurso tecnológico: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de Karine e Vitória. In: SPINILLO, A; LAUTERT, S. **A Pesquisa em Psicologia e suas Implicações para a Educação Matemática**. Recife: Editora Universitária, 2012.

FERRAZ, Martha; BORBA, Rute; AZEVEDO, Juliana. Usando o software Árbol na construção de árvores de possibilidades para a resolução de problemas combinatórios. **Anais...** 10º Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador, 2010.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Editora Artes Médicas, 1997.

SANDOVAL, I.; TRIGUEIROS, M.; LOZANO, D. Uso de un interactivo para el aprendizaje de algunas ideas sobre combinatoria en primaria. **Anais...** 12 Comitê Interamericano de Educação Matemática, Querétaro, México, 2007.