

# **Construção e Utilização de Vídeos Digitais para a Organização de Modelos Mentais durante o Estudo de Sistemas de Equações Lineares**

**Valdinei Cezar Cardoso<sup>1</sup>**

**Samuel Rocha de Oliveira<sup>2</sup>**

**Nome do Grupo de Discussão (GD 06):** Educação Matemática, Tecnologias Informáticas e Educação à distância

## **Resumo**

Este trabalho propõe uma metodologia para o ensino de Álgebra Linear, que integra aulas presenciais expositivas e dialogadas, a utilização de mídias que permitam a gravação de pontos importantes destas aulas, no formato de vídeos digitais com duração de até 25 minutos, utilizados como complemento dos estudos realizados durante as aulas presenciais. A partir de tal proposta esperamos compreender um pouco melhor os processos de construção e a organização de modelos mentais dos estudantes de um curso de graduação em Física, em uma universidade pública do interior do Estado do Paraná. A fundamentação teórica desse trabalho será composta pelas teorias dos modelos mentais de Jhonson-Laird, das representações semióticas de Duval e dos campos conceituais de Vergnaud. A caracterização do grupo da pesquisa de campo será de relevância à investigação, considerando que as experiências dos acadêmicos do grupo pesquisado, poderão contribuir para que professores e autores de livros didáticos de Álgebra Linear utilizem modelos conceituais adequados para o favorecimento da aprendizagem dos estudantes nessa disciplina.

**Palavras-chave:** Modelos mentais. Representações semióticas. Invariantes operatórios. Aprendizagem de Álgebra Linear. Vídeo.

## **1. Introdução**

O aprendizado da álgebra é fundamental para o sucesso na aprendizagem de Matemática, mas o tratamento algébrico de questões matemáticas pode tornar a Matemática não compreensível (ARTIGUE et al., 2000), já que a generalização de situações-problemas, em muitos casos, gera dificuldades no tratamento das representações necessárias para as suas compreensões e resoluções.

Por isso, nos cursos superiores o estudo dos sistemas de equações lineares, que é parte do programa da maioria dos cursos do campo das ciências exatas, é tratado por muitos estudantes como um conteúdo muito difícil e desligado da realidade cotidiana. Neste sentido

---

<sup>1</sup> Universidade Estadual de Campinas e Universidade Estadual de Maringá, [v13dinei@gmail.com](mailto:v13dinei@gmail.com).

<sup>2</sup> Universidade Estadual de Campinas, [samuel@ime.unicamp.br](mailto:samuel@ime.unicamp.br).

pesquisas como a de Wang, Posey e Mahmoud (2011) buscam desenvolver metodologias que auxiliem no ensino e no aprendizado deste conceito.

Neste viés acreditamos que o nosso trabalho justifica-se por propor uma investigação sobre uma metodologia de ensino em que além de ministrar as aulas presencialmente, o professor também grava em tempo real as explicações, na forma de pequenos vídeos com no máximo 25 minutos, disponibiliza-os em um blog<sup>3</sup> e a partir da interação dos estudantes com as aulas presenciais e com estes vídeos buscamos investigar as relações entre os modelos mentais produzidos pelos estudantes e a metodologia adotada pelo professor.

Nosso estudo será feito com um grupo de estudantes de um curso de graduação em Física, de uma universidade estadual do interior do Estado do Paraná, e a partir dele esperamos reunir elementos que permitam uma melhor compreensão da influência de tal metodologia sobre a construção de modelos mentais estáveis pelos acadêmicos supracitados.

A pergunta que buscaremos responder durante o nosso trabalho será: Quais são as relações entre a metodologia adotada em nosso trabalho, que integra aulas presenciais e vídeos digitais criados durante estas aulas, e a construção de modelos mentais por parte dos estudantes?

Para tentarmos responder a esta pergunta vamos utilizar como fundamentação teórica a teoria dos modelos mentais de Johnson-Laird (1983), a teoria das representações semióticas de Duval (2006) e a teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1990).

## **2. Fundamentação teórica**

### **2.1. Os modelos mentais e o professor**

A experiência dos professores pode auxiliar os estudantes na compreensão de conceitos matemáticos. Bransford et al. (2000) afirma que os especialistas em determinadas áreas percebem, com mais facilidade do que os iniciantes, características e padrões significativos dentro de suas áreas de atuação.

Por isso acreditamos que as explicações de um professor sobre determinado conceito pode favorecer o aprendizado por parte dos estudantes e esse favorecimento pode ser potencializado se a explicação ficar gravada em um vídeo digital e disponível na internet para que os estudantes possam revê-la sempre que necessário.

---

<sup>3</sup> [www.v13dinei.blogspot.com](http://www.v13dinei.blogspot.com)

A dinâmica educativa quase sempre começa com um professor criando um modelo conceitual com o objetivo de demonstrar aos estudantes como está organizado o seu modelo mental. No entanto, nem tudo que o professor explica é compreendido pelo estudante de forma consistente, pois os professores, quando comparados com os estudantes, têm uma quantidade maior de conhecimentos sobre a sua área de trabalho e por isso tendem a apresentar uma compreensão mais profunda sobre o tema estudado (BRANSFORD et al., 2000, p. 31) - compreensão esta que nem sempre é compartilhada pelos estudantes, que em muitos casos, se “perdem” ao acompanhar aquilo que o professor explica.

Tais dificuldades podem ser oriundas do fato de seus conhecimentos sobre os temas estudados nos ambientes escolares serem produzidos a partir da agregação desordenada de fatos isolados ou proposições desconectadas entre si. Por isso acreditamos que as gravações de explicações dos professores sobre alguns tópicos ministrados durante as aulas presenciais, pode contribuir para a organização dos modelos mentais dos estudantes.

Recorremos a Johnson-Laird (1983) para compreendermos melhor esta dinâmica de ensino e aprendizagem. Para ele, as pessoas aprendem por meio da construção de modelos mentais, que seriam representações individuais criadas pelos indivíduos com o objetivo de compreender o mundo exterior.

Pode-se encontrar na literatura científica pesquisas como a de Monteiro (2000), Medeiros (2001) e Moreira (1997; 2012) que buscam compreender as relações entre os modelos mentais e o entendimento de conceitos científicos atrelados à solução de problemas a eles relacionados, porém no ensino de Álgebra Linear não temos o conhecimento de trabalho algum que busque uma melhor compreensão de situações de ensino que otimizem a construção de modelos mentais no âmbito dessa disciplina.

É justamente quando o modelo matemático é representado por uma entidade conceitual ou por outro modelo matemático que acreditamos encontrar as maiores dificuldades de construção de modelos mentais por parte do estudante. Em nosso trabalho buscaremos melhor compreender alguns caminhos percorridos pelos estudantes para a construção de modelos mentais relacionados à Álgebra Linear.

## **2.2. Representações semióticas utilizadas no estudo dos sistemas de equações lineares**

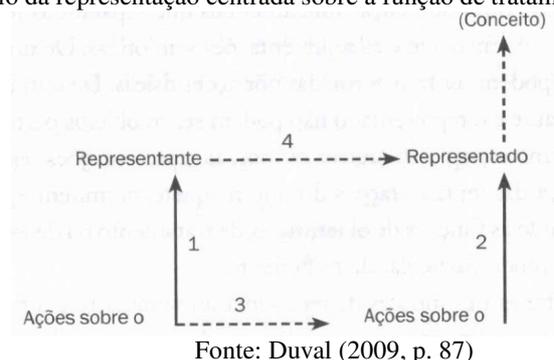
Para Duval (2006) há três tipos de representações: as mentais - compostas pelo conjunto de concepções de um indivíduo; as semióticas - exteriorizam as representações

mentais do indivíduo, são externas e conscientes e seriam percepções externas que foram interiorizadas; as representações internas ou computacionais - que são aquelas cuja execução é automática quando o indivíduo realiza determinada tarefa.

O acesso aos objetos matemáticos se dá por meio das representações destes objetos no papel, no computador, no quadro branco, entre outros; daí a importância de se investigar as representações utilizadas pelos sujeitos durante a construção do saber matemático, pois diferentes representações semióticas podem influenciar na atividade cognitiva do indivíduo de maneiras distintas (DUVAL, 2006).

Um dos grandes entraves para a aprendizagem matemática é que os estudantes confundem a representação com o próprio objeto matemático. Um caminho para superar esta dificuldade seria a utilização de diferentes representações para ensinar um mesmo conceito matemático. Antes disso, porém, é preciso detectar os registros de representação semiótica que os estudantes explicitam durante o estudo da Matemática. Tais registros podem ser expressos na forma tabular, linguística, gráfica, figural ou algébrica. Uma forma de detectar tais registros é a análise de situações que tenham como pano de fundo a organização apresentada na Figura 01, que apresenta a relação entre significação e objeto proposta por Duval (2009). Em nosso trabalho os vídeos digitais atuam como objeto que é o veículo de representação de modelos mentais do professor.

**Figura 01:** Modelo da representação centrada sobre a função de tratamento por simulação.



Em cada vídeo produzido durante o nosso trabalho entendemos há um significado a ser compreendido. Porém, para cada estudante que o assistir, a significação, ou seja o sentido atribuído a um conceito presente no vídeo pode ser diferente daquela utilizada pelo professor. É por isso que vamos categorizar e analisar a emergência de significações relacionadas aos conceitos de Álgebra Linear a partir dos vídeos digitais produzidos. Podemos afirmar, em

acordo com a Figura 01, que cada vídeo sugere algumas ações sobre os objetos representados (conceitos, fórmulas, leis gerais) e as formas como estes objetos são representados (os representantes). E a partir disto pretendemos investigar as ações mobilizadas pelos sujeitos.

Assim, considerando as ações sugeridas pelos vídeos e naquelas executadas pelos sujeitos da pesquisa, faremos uma categorização que leva em consideração as conversões feitas pelos estudantes. Tal categorização nos auxiliará na busca de respostas à pergunta “Quais são as relações entre a metodologia adotada em nosso trabalho, que integra aulas presenciais e vídeos digitais criados durante estas aulas e a construção de modelos mentais por parte dos estudantes?”

### **2.3. A teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud**

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC), “é uma teoria cognitivista, que visa fornecer um quadro coerente entre alguns conceitos com base no estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas” (VERGNAUD, 1990, p. 135).

A finalidade principal da TCC é compreender as relações entre as rupturas que ocorrem na construção dos conhecimentos, na aprendizagem e no desenvolvimento cognitivo. Segundo esta teoria, um conceito só tem sentido para os estudantes, a partir do momento em que este for aplicado em situações e problemas e o estudante puder construir hipóteses e estratégias para resolvê-los.

A adaptação do estudante às novas situações é que indica os caminhos para a aprendizagem durante suas ações. O estudante utiliza diversos conhecimentos, durante essa aprendizagem, com o objetivo de se adaptar às novas situações a que ele é submetido. Esses conhecimentos são classificados por Vergnaud (1990) como operatórios e não-operatórios. Para ser operatório, um conhecimento precisa fornecer ao sujeito mecanismos para tratar imediatamente uma situação, nesse caso o esquema utilizado é único e organizado. Em nosso trabalho esta teoria auxiliará na categorização dos teoremas em ação adotados pelos estudantes.

## **3. Metodologia**

### **3.1 Instrumentos para coleta de dados**

Nas palavras de Moreira (2012, p. 15) a “aprendizagem é uma atividade idiossincrática que pode não ser consequência necessária do ensino recebido”, mas para sabermos se um determinado grupo de estudantes aprendeu algo é preciso avaliá-lo. Neste processo busca-se

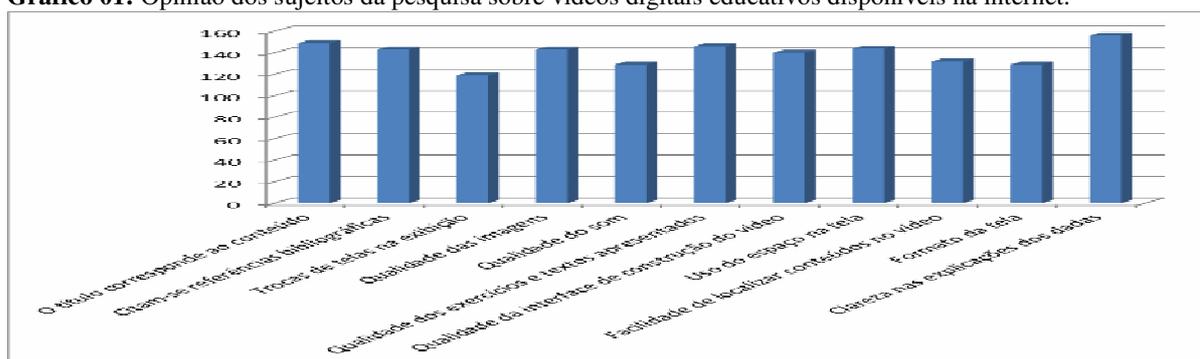
uma melhor compreensão daquilo que os estudantes sabem sobre o tema ensinado e sobre os procedimentos adotados para ensinar.

Por isso, utilizamos como instrumentos de coleta de dados: diários de campo para registrar os fatos mais importantes observados durante as aulas, entrevistas semiestruturadas nas quais os sujeitos comentavam sobre algumas ações necessárias para resolver algumas situações-problema, análise de mapas conceituais feita durante todo o trabalho, como forma de compreender um pouco melhor as mudanças cognitivas ocorridas durante a pesquisa, filmagens e gravações em áudio das aulas visando compreender as interações professor-aluno-conhecimento e gravação de monitorias ministradas por vídeo conferências como forma de acompanhamento daquilo que os estudantes não compreenderam nas aulas e nos momentos de estudo individual.

As gravações dos vídeos digitais foram feitas levando-se em consideração que os modelos conceituais, para serem acessíveis ao maior número possível de estudantes, devem ser claros, simples e não devem suprimir etapas do raciocínio apresentado.

Além disso, antes de iniciarmos a produção dos vídeos digitais para as aulas de Álgebra Linear, solicitamos aos participantes da pesquisa que respondessem a um questionário de avaliação de vídeos digitais disponíveis na internet. Tais questões tinham o objetivo de dar-nos subsídios sobre algumas características dos vídeos digitais educativos que favorecem o aprendizado por parte dos sujeitos envolvidos nesta pesquisa.

**Gráfico 01:** Opinião dos sujeitos da pesquisa sobre vídeos digitais educativos disponíveis na internet.



**Fonte:** acervo do pesquisador

Os escores obtidos em cada item deste gráfico foram obtidos somando-se as pontuações, numa escala de 0 até 10, que os 22 sujeitos desta pesquisa marcaram para cada um dos temas propostos.

Ao observar o Gráfico 01, notamos que as trocas de telas durante a exibição e a facilidade de localizar os conteúdos procurados em um vídeo, são pontos a serem melhorados na produção de vídeos digitais educativos. Merecem atenção também o formato utilizado nas telas dos vídeos, a qualidade e o volume do som da narração.

O resultado deste breve levantamento influenciou na produção dos vídeos utilizados em nosso trabalho que buscava atender às sugestões dos participantes de nossa pesquisa, grupo que caracterizaremos a seguir.

### **3.2 Participantes**

Participam deste estudo 22 estudantes de um curso de Licenciatura em Física de uma universidade estadual do interior do Estado do Paraná que foram matriculados em um curso de Álgebra Linear com 68 horas de duração durante o ano letivo de 2012. Durante o curso os estudantes foram submetidos à aplicação de seis testes escritos, seis testes orais e seis coletas de mapas conceituais relacionados aos conceitos estudados.

O professor da disciplina, um dos autores desse texto (VCC), desempenha simultaneamente as funções de professor e de pesquisador, ministrando as aulas e efetuando as coletas de dados para posterior análise. Ele tem 10 anos de experiência docente nos Ensinos Fundamental e Médio e 5 anos de experiência no nível superior. Cada aula ministrada tinha a duração de 1h40min.

A escolha deste grupo de estudantes se justifica por ser o curso de Licenciatura em Física, que apresenta um grande número de desistências e reprovações, e conseqüentemente uma baixa taxa de alunos concluintes. Além disso, a maioria das desistências ocorre nos primeiros anos do curso, época em que são ministradas as aulas de Álgebra Linear. A escolha da disciplina se deu por ser uma das disciplinas que mais apresentam reprovações nos primeiros anos do curso.

### **4. Uma breve apresentação dos vídeos produzidos na primeira etapa deste trabalho.**

Os vídeos<sup>4</sup> tinham o objetivo de proporcionar aos estudantes o contato com modelos conceituais de cada um dos tópicos tratados, produzidos e narrados pelo professor da turma.

Esperávamos que de alguma forma os vídeos apresentassem situações nas quais o professor da turma criou modelos conceituais que tinham o objetivo de demonstrar aos

---

<sup>4</sup> Disponíveis em: [www.v13dinei.blogspot.com](http://www.v13dinei.blogspot.com)

estudantes como está organizado o seu modelo mental e que pudessem contribuir com a construção de modelos mentais por parte dos estudantes. Sabíamos que nem tudo que foi demonstrado pelo professor seria entendido por todos os estudantes, mas para nós tais mídias poderiam motivar os estudantes a revisar o conteúdo em momentos de estudo individual ou em grupos.

#### 4.1 Análise de uma das resoluções apresentadas para uma das atividades propostas

Para exemplificarmos como pretendemos analisar todas as atividades aplicadas durante este trabalho, apresentamos a seguir a resolução de uma atividade, proposta no dia 14/08/2012:

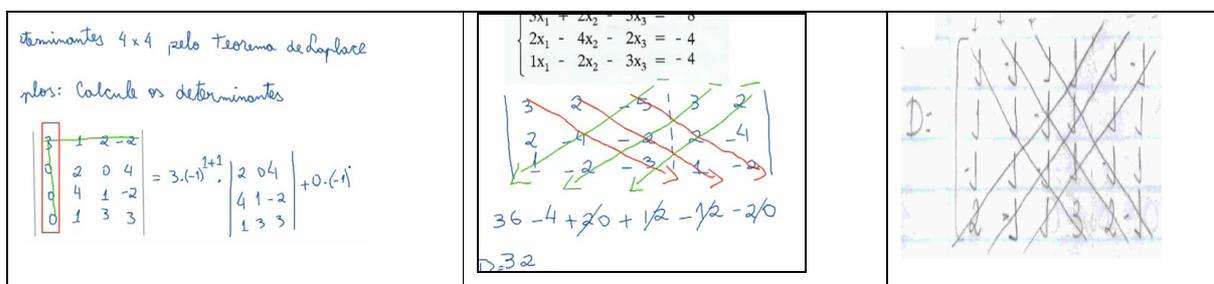
“Determine o valor de uma das incógnitas do sistema linear a seguir, utilizando a regra de Cramer:”

$$a) \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x + y - z + t = 1 \\ -x + y - z + t = 1 \\ 2x - y - z + 3t = 1 \end{cases}$$

Para resolver este sistema de equações a estudante Ghei<sup>5</sup>, que participava de uma aula presencial, poderia acessar a internet e consultar os vídeos relacionados ao tema estudado durante a aula. Notamos que a estudante usou o vídeo da Figura 02:a), que tratava do tema regra de Cramer e apresentava os procedimentos necessários para a resolução de um sistema com três incógnitas e três equações e o vídeo da Figura 02:b), que apresentava os procedimentos para se calcular o determinante de uma matriz de ordem 4.

Observamos que ao aplicar os procedimentos mostrados nestes vídeos, na resolução de uma das atividades propostas, Figura 02:c), a estudante não conseguiu relacionar os dois vídeos, um que ensinava a calcular determinantes de ordem 4 e outro que explicava a regra de Cramer.

**Figura 02:** Utilização de vídeos para resolver sistemas de equações lineares



<sup>5</sup> Nome fictício escolhido pela estudante.

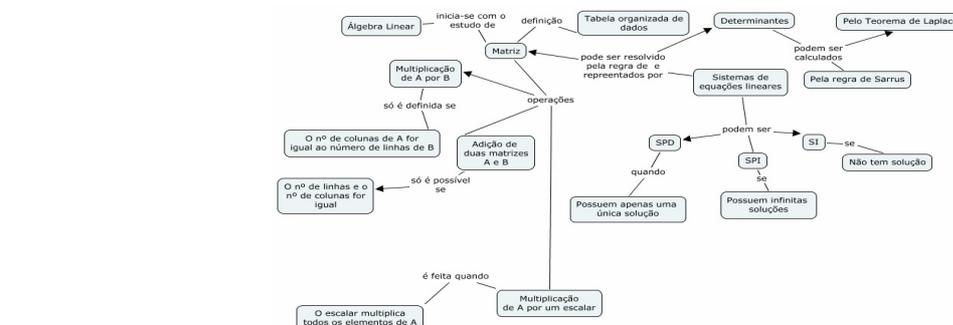
a) Vídeo sobre teorema de Laplace <sup>6</sup>	Vídeo sobre a resolução de sistemas de equações lineares pela regra de Cramer. <sup>7</sup>	b) Resolução apresentada pela estudante Ghei
--	---	--

Na Figura 02:c) que a estudante aplicou a regra de Sarrus, que era usada no vídeo (Figura 02:a)), para resolver um sistema cuja matriz dos coeficientes tinha ordem 4. Por este motivo a estudante não obteve sucesso em sua resolução.

Este será o procedimento que faremos com todos os vídeos produzidos e todas as atividades resolvidas pelos sujeitos participantes da pesquisa, buscando associar representações e invariantes apresentados nos vídeos com as dificuldades manifestadas pelos estudantes, sendo que as dificuldades também serão categorizadas por grupo de conceitos ministrados.

Outro procedimento que adotaremos para coleta e análise dos dados coletados será o recolhimento periódico de mapas conceituais construídos pelos estudantes sobre os conceitos já estudados, discutidos presencialmente e disponibilizados para estudo complementar por meio de vídeos. Na Figura 03 o professor apresenta um mapa conceitual relacionando os conceitos mais importantes estudados pela turma nas primeiras semanas do curso.

**Figura 03:** Mapa conceitual apresentado pelo professor da turma ao final da primeira etapa do curso.



Uma semana depois o professor solicita aos estudantes a confecção de um mapa conceitual relacionando os conceitos vistos anteriormente. Tal confecção deveria ser feita sem consulta ao mapa conceitual feito pelo professor. A estudante Ghei apresentou o “mapa conceitual” da Figura 04:

**Figura 04:** Respostas da estudante Ghei após uma aula presencial (item a) e após três semanas de estudos individuais e apoio de vídeos digitais que tratavam dos temas envolvidos(item b).

<sup>6</sup> [http://www.youtube.com/watch?v=CJd3nQdEhaA&feature=player\\_embedded](http://www.youtube.com/watch?v=CJd3nQdEhaA&feature=player_embedded)

<sup>7</sup> [http://www.youtube.com/watch?v=pNxn9MhgMLw&feature=player\\_embedded](http://www.youtube.com/watch?v=pNxn9MhgMLw&feature=player_embedded)

<p>Mapa conceitual da 07 de Agosto</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1- Matrizes e operações: Cada semana cada número com o respectivo comprimento da outra matriz e assim formamos uma nova matriz nova.</li> <li>2- Matriz - substituição: Formamos a mesma coisa que no código, substituímos os números da primeira coluna com o número.</li> <li>3- Resolução de sistemas lineares: Um conjunto de várias equações lineares com variáveis e incógnitas. São resolvidas da mesma com o número de resolução. Quando for diferente de um sistema podemos formar uma nova matriz.</li> <li>4- Matriz transposta: Para transformar uma matriz em matriz transposta basta trocar os elementos das linhas pelas colunas e vice-versa.</li> <li>5- Matriz na forma escada: Quando ficamos numa linha na forma de escada e os números abaixo dela não equivalem a zero.</li> <li>6- Regra de Sarrus: Essa regra é que para encontrar o valor numérico de um determinante de 3x3, temos que repetir os seus primeiros colunas de dentro e multiplicar na forma diagonal os números com o sinal de menos na volta.</li> </ol>	<p>Mapa conceitual</p> <p>The conceptual map shows 'matriz' at the top left, connected to 'multiplicação' and 'matrizes'. 'multiplicação' is connected to 'matrizes' and 'determinantes'. 'matrizes' is also connected to 'escalas'. 'determinantes' is connected to 'regra de Sarrus'. 'regra de Sarrus' is connected to 'escalas'. 'escalas' is connected to 'matrizes' and 'escalas'.</p>
<p>a) Sequência de tópicos apresentados pela estudante Ghei uma semana após o professor ter apresentado um mapa conceitual dos temas estudados anteriormente</p>	<p>b) Mapa conceitual apresentado pela estudante Ghei, três semanas depois da apresentação do mapa apresentado no item a).</p>

Após três semanas a estudante otimizou a sua forma de apresentação de mapas conceituais, sintetizando aquilo que tinha estudado nas aulas presenciais e nos vídeos digitais, o que nos leva a supor que o tempo de estudos individuais e o apoio dos vídeos possam ter contribuído para tal mudança, que para nós foi positiva.

#### 4.2 Conflitos semióticos detectados

Até o momento em nossa análise de dados notamos que dentre os principais conflitos semióticos detectados, podemos destacar os seguintes: assistir a um vídeo sobre a regra de Sarrus e aplicá-la para o cálculo de determinantes de matrizes de ordem 4; aplicar a mesma técnica da adição de matrizes, para problemas de multiplicação de matrizes; para multiplicar duas matrizes  $A \cdot B$ , muitos estudantes multiplicam os elementos das colunas da matriz  $A$ , pelos elementos das linhas da matriz  $B$ ; confundir a multiplicação de matrizes por escalar com a multiplicação de matrizes.

Notamos que ao detectarmos estes conflitos durante as aulas presenciais e disponibilizarmos recortes destas aulas, na forma de pequenos vídeos digitais por meio da internet, muitos estudantes, que assistiram aos vídeos, conseguiram superar alguns destes conflitos.

Por isso acreditamos que pequenos vídeos digitais, sobre aquilo que o professor explica durante as aulas presenciais podem servir como reforço positivo para que os estudantes organizem seus modelos mentais sobre os conceitos estudados e é dessa forma que iremos categorizar os dados obtidos durante todo o curso de Álgebra Linear.

## 5. Considerações Parciais

Os vídeos podem motivar o estudo individual dando mais segurança aos estudantes, mas muitos estudantes tendem a aplicar literalmente as ideias presentes nos vídeos em problemas relacionados, sem generalizar aquilo que se aprendeu antes de aplicar em uma situação nova.

Para os estudantes que têm dificuldades em anotar aquilo que é visto nas aulas, a possibilidade de gravar partes das aulas e disponibilizá-las pela internet pode ser uma oportunidade de revisão daquilo que não se tinha compreendido durante tais aulas.

Ao utilizar vídeos como material de apoio para momentos de estudo, fora da sala de aula, o professor economiza tempo com explicações sobre o mesmo conteúdo para diferentes estudantes que o procuram para tirar dúvidas. Além disso, os vídeos podem ser utilizados como material de pesquisa, pelos estudantes, o que pode contribuir para o desenvolvimento da autonomia e independência do estudante na produção do seu próprio conhecimento.

Esperamos que até a conclusão deste trabalho possamos estabelecer algumas considerações acerca das relações entre a produção de vídeos digitais, o desempenho dos estudantes e o desenvolvimento de modelos mentais mais organizados.

A argumentação do professor, gravada na forma de vídeo digital, parece ter exercido um papel importante para ajudar os estudantes a produzirem relações entre aquilo que estudaram nas aulas presenciais e aquilo que estudaram nos livros especializados. Tivemos a impressão de que tais mídias favoreceram a construção de vínculos entre modelos mentais desorganizados dos estudantes e a linguagem abstrata presente na Álgebra Linear.

Por fim, acreditamos que a natureza e a estrutura das tarefas propostas podem influenciar, na construção de representações semióticas (DUVAL, 2003) e invariantes operatórios (Vergnaud, 1990), que por sua vez influenciam diretamente na construção de modelos mentais relacionadas a estas tarefas. Sobre isso trataremos nas etapas seguintes do nosso trabalho.

### \* Agradecimentos

Este trabalho conta com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior (CAPES).

## 6. Referências

- ARTIGUE, Michèle; ASSUDE, Teresa; GRUGEON, Brigitte; LENFANT, Agnès. Teaching and learning algebra: approaching complexity through complementary perspective. In: ICM, Beijing, 2002. **Anais eletrônicos**, Beijing, 2002. Disponível em: <http://www.mathunion.org/Publications/historic-material>
- BRANSFORD, John D. et al.. **How people learn: brain, mind, experience, and school**. Washington: National academy press, 2000.
- DUVAL, Raymond. **A cognitive analysis of problems of comprehension in a learnig of mathematics**. Educational Studies in Mathematics. New York: Springer, 2006.
- Duval, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages intellectuels)**: (fascículo I). Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
- DUVAL, R. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. In: MACHADO, Silvia D. A. *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. Campinas: Editora Papyrus, p.11-34, 2003.
- JOHNSON-LAIRD, P. **Mental models**. Cambridge, MA: Harvard University Press. 1983.
- MEDEIROS, C. **Modelos mentais e metáforas na resolução de problemas matemáticos verbais**. Ciência & Educação, v.7, n.2, p.209-234, 2001.
- MONTEIRO, I. **Analogias em livros didáticos de química brasileiros destinados ao ensino médio**. Investigações em Ensino de Ciências – V5(2), pp. 67-91, 2000.
- MOREIRA, M. A. **Modelos Mentais**. Investigações em Ensino de Ciências, Porto Alegre, v. 1, n. 3, pp. 193-232, 1996. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/N3/moreira.htm> . Acesso: 01 set 2010.
- MOREIRA, Marco Antônio. **Metodologias de pesquisa em ensino**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012.
- VERGNAUD, G. **La théorie des champs conceptuels**. Recherches en Didactique des Mathématiques, 10 (23): 133-170, 1990.
- WANG, Haohao; POSEY, Lisa; Yousef Mahmoud. **An experimental study in inquiry-based teaching of a linear algebra class**. Far East Journal of Mathematical Education. Vol. 7, Issue 1, p. 1-9. 2011.