

Processos do Pensamento Matemático Avançado Evidenciados em Produções Escritas das Questões do Enade por Graduandos em Matemática

Laís Cristina Viel Gereti¹

Angela Marta Pereira das Dores Savioli²

Educação Matemática no Ensino Superior

Resumo: Utilizando os referenciais teóricos Dreyfus (1991) e Resnick (1987) e suas caracterizações a respeito do Pensamento Matemático Avançado (P.M.A.), investigaremos que processos do P.M.A. graduandos de Matemática evidenciam ao resolver questões dissertativas do Enade. Para análise da produção escrita dos estudantes, a Análise de Conteúdo, segundo Bardin (1997), nos auxiliará nestes procedimentos.

Palavras-chave: Educação Matemática. Pensamento Matemático Avançado. Enade.

INTRODUÇÃO

Em um curso de graduação em Matemática, em geral, professores estão preocupados em “passar” o conteúdo aos estudantes, dar conta do livro de Geometria, de Álgebra e de Análise, por exemplo, mas nem sempre se preocupam em “como” fazer isso e se o aluno realmente está aprendendo. Talvez isso seja uma herança do ensino tradicional, em que se acredita que há uma aprendizagem quando se reproduzem técnicas. Segundo Dreyfus (1991) o que é exposto ao graduando é uma Matemática pronta e acabada e não basta definir um conceito abstrato e exemplificá-lo. Os alunos devem construir as propriedades de tal conceito por meio de deduções a partir da definição e se envolver em atividades que promovam a própria abstração.

¹ Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – PECEM - da Universidade Estadual de Londrina-UEL , laisvielg@hotmail.com.

² Professora Doutora da Universidade Estadual de Londrina e membro do PECEM, angelamarta@uel.br.

Tentar compreender o que está acontecendo na mente dos estudantes, se estão abstraindo os conceitos matemáticos, se passam de um nível de pensamento para outro, implica envolvimento e a interação dos processos que estão presentes no Pensamento Matemático Avançado. Assim pretendemos investigar estes processos nas resoluções das questões dos estudantes.

JUSTIFICATIVA

Estudos, como os de Lorenzato (1995), mostram que na educação básica a Matemática se apresenta como pronta, sendo que muitas vezes o professor não oportuniza os processos de ensino e aprendizagem, não dando margens “à exploração, à construção de conceitos e ao encaminhamento do aluno às suas próprias deduções” (FAINGUELERNT, 1999). Mas isso não ocorre somente na educação básica.

No Ensino Superior, em cursos de graduação, em especial o de Matemática, o que é exposto ao aluno, segundo Dreyfus (1991), é a Matemática como produto acabado, polido e incontestável.

Optamos por investigar quais processos do Pensamento Matemático Avançado estão presentes em produções escritas de estudantes de um curso de Matemática.

As questões serão escolhidas do Enade³ dos anos de 2005, 2008 e 2011, selecionando questões discursivas ou adaptadas por propiciarem o registro escrito dos estudantes.

QUESTÃO INVESTIGATIVA

Que características do Pensamento Matemático Avançado são evidenciadas em produções escritas de estudantes do curso de Matemática ao resolverem questões do Enade?

³ O Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (Enade) avalia o rendimento dos alunos dos cursos de graduação, ingressantes e concluintes, em relação aos conteúdos programáticos dos cursos em que estão matriculados. O exame é obrigatório para os alunos selecionados. Maiores informações <http://portal.mec.gov.br/>.

OBJETIVO

O objetivo é investigar que características do Pensamento Matemático Avançado estudantes de um curso de Matemática evidenciam ao resolver questões do Enade.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Uma maneira para tentar compreender o que está acontecendo na mente dos estudantes, se eles apresentam o processo de abstrair os conceitos matemáticos, se eles passam de um nível de pensamento para outro, é o envolvimento e a interação dos processos que estão presentes no Pensamento Matemático Avançado.

A teoria do Pensamento Matemático Avançado (PMA), segundo Harel, Selden e Selden (2006), surgiu no início dos anos 80 com um grupo de trabalho, o *Psychology of Mathematics Education*, que trabalhava com o “pensamento matemático elementar” e tinha como membros principais Gontran Ervynck e David Tall. O grupo incluiu no termo “pensamento matemático avançado” toda a gama do pensamento matemático, desde os últimos anos do ensino secundário até a matemática formal axiomática baseada em provas e teoremas. De fato, há muitas discussões a respeito do que significa o termo “pensamento matemático avançado”, não existindo ainda algo que possa defini-lo.

Resnick (1987) dá o nome de *pensamento de ordem superior* àquilo que outros nomeiam por pensamento matemático avançado e afirma que não existe uma definição exata para este pensamento, mas apresenta algumas características chave que podem ocorrer, como:

- Pensamento de ordem superior é não algorítmico. Isto é, o caminho de ação não está completamente especificado previamente.
- Pensamento de ordem superior tende a ser complexo. O caminho todo não é “visível” (mentalmente falando) para qualquer ponto de vista único;
- Pensamento de ordem superior frequentemente rende muitas soluções, cada uma com custos e benefícios, ao invés de soluções únicas;
- Pensamento de ordem superior envolve julgamentos e interpretações sutis;
- Pensamento de ordem superior envolve a aplicação de múltiplos critérios, o que por vezes entram em conflito uns com os outros;
- Pensamento de ordem superior geralmente envolve incerteza. Nem tudo o que está na tarefa é conhecido;

- Pensamento de ordem superior envolve auto-regulação do processo de pensamento. Nós não reconhecemos o pensamento de ordem superior de um indivíduo que “pergunta” quais passos deve seguir;
- Pensamento de ordem superior envolve uma imposição de sentido, quando a estrutura se encontra em desordem aparente;
- Pensamento de ordem superior é trabalhoso. Há um considerável trabalho mental envolvido nos tipos de elaborações e julgamentos necessários. (RESNICK, 1987, p. 3).⁴

Para Dreyfus (1991), os processos de *abstração* e *representação* são os processos que estão envolvidos no Pensamento Matemático Avançado e que permitem passar de um nível de detalhe para outro.

Para o autor, o professor sabe que a Matemática não está sendo construída de maneira perfeita, mas sim por meio de tentativas e erros e mesmo assim continua ensinando o aspecto matemático mais prático, seguindo a sequência teoria-prova-aplicação. Esse tipo de ritual, de procedimentos padronizados, esclarece Dreyfus (1991), é ensinado durante a maior parte do ensino de matemática, desde o Ensino Fundamental até a graduação.

Os processos envolvidos na *representação*, segundo Dreyfus (1991), envolvem o *representar*, a *tradução e mudanças de representações* e a *modelagem*.

Em relação ao processo *de representar*, estão presentes as representações simbólicas e as representações mentais.

Quanto às representações simbólicas, o autor afirma que os símbolos envolvem as relações entre os signos e os significados, para fazer com que um conhecimento pessoal implícito seja explicitado em termos de símbolos. Assim a representação simbólica, segundo Dreyfus, “é externamente escrita ou falada, geralmente com o objetivo de tornar a comunicação sobre o conceito mais simples” (p.31)⁵.

Em relação às representações mentais, o autor afirma que elas referem-se a esquemas internos ou quadros de referência que as pessoas usam para interagir com o

⁴ “Higher order thinking is nonalgorithmic. That is, the path of action is not specified in advance. Higher order thinking tends to be complex. The total path is not “visible” (mentally speaking) from any single vantage point. Higher order thinking often yields multiple solutions, each with costs and benefits, rather than unique solutions. Higher order thinking involves nuanced judgment and interpretation. Higher order thinking involves the application of multiple criteria, which sometimes conflict with one another. Higher order thinking often involves uncertainty. Not everything that bears on the task at hand is known. Higher order thinking involves self-regulation of the thinking process. We do not recognize higher order thinking in an individual when someone else “calls the plays” at every step” (RESNICK, 1987, p. 3).

⁵ “Is externally written or spoken, usually with the aim of making communication about the concept easier” (DREYFUS, 1991, p.31).

mundo externo. Na sala de aula isso pode causar algumas discrepâncias, pois cada um pensa em um determinado conceito de maneiras diferentes, e isso pode levar a situações nas quais os alunos não compreendem seus professores. Por exemplo:

“Quando falamos ou pensamos sobre um grupo, uma integral, uma aproximação, ou a respeito de qualquer outro objeto do processo matemático, cada um de nós o relaciona com algo que temos em mente – uma representação mental do objeto ou processo em questão” (DREYFUS, 1991, p.31)⁶.

Assim como as representações mentais são criadas na nossa mente, podemos criar uma ou várias representações mentais para um mesmo conceito matemático.

Os processos *tradução e mudanças de representações* nos mostram que mesmo tendo muitas representações de um conceito não é suficiente para ter um uso flexível dessas representações na resolução de problemas. O aluno, portanto, deve ser capaz de transitar, de mudar entre as várias representações de um mesmo conceito matemático.

Dreyfus (1991) afirma que este processo de mudança para se ensinar e aprender não é fácil, pois se trata de uma estrutura muito complexa. O que pode ser feito, segundo o autor, é fazer desde o início (do processo de ensino na escola) a aplicação dessas várias representações no ensino enfatizando o processo de mudança de representações.

Outro processo envolvido na representação é a *modelagem*. Este consiste em encontrar uma representação matemática para um processo não-matemático. Para Dreyfus (1991), a modelagem pode ser usada para estudar o comportamento do processo a ser modelado, mas para uma pessoa pensar a respeito disso ela também precisa de uma representação mental da situação. Assim há uma ligação interessante entre o modelo e a representação mental.

Quanto aos processos envolvidos na *abstração* está *generalizar e sintetizar*, que formam uma base para se abstrair. Para Dreyfus (1991) abstrair é, dentre todos os processos, o mais importante. “Se o aluno desenvolve a habilidade de conscientemente fazer abstrações a partir de situações matemáticas, ele alcançou um nível avançado de pensamento matemático” (DREYFUS, 1991, p.34)⁷.

⁶ “When we talk or think about a group, an integral, an approximation, about any mathematical object or process at all, each one of us relates to something we have in mind – a mental representation of the object or process under consideration.” (DREYFUS, 1991, p.31).

⁷ “If a student develops the ability to consciously make abstractions from mathematical situations, he has achieved an advanced level of mathematical thinking” (DREYFUS, 1991, p.34).

O processo de *generalizar*, segundo Dreyfus (1991), é derivar ou induzir de particularidades, de indicações expandindo os domínios de validade. Este processo é importante para estabelecer um resultado para uma grande classe de casos.

Quanto ao processo de *sintetizar*, de acordo com Dreyfus (1991), consiste em combinar ou compor partes de uma maneira que forme um todo. Este conjunto equivale, muitas vezes, a mais que a soma de suas partes. Por exemplo, muitos conteúdos são ensinados de forma isolada como ortogonalização de vetores, diagonalização de matrizes, transformação de bases, etc. E o que se espera com isso é que no processo de aprendizagem todos estes fatos não relacionados anteriormente se fundem em uma única imagem, de maneira a se interligar e se compor. Este processo é uma síntese. O autor, ainda afirma que em uma aula prática não há ênfase para se fazer tal processo. Mesmo o professor explicando detalhes, poucas atividades se destinam a levar o aluno a sintetizar os diferentes aspectos de um conceito.

O processo de abstrair está intimamente ligado com o processo de generalizar e sintetizar, mas nenhum desses oferece um esforço cognitivo para realizar uma atividade quanto abstrair. Para Dreyfus (1991) abstrair é um processo de construção de estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas. E, além disso,

“requer a habilidade de deslocar a atenção dos objetos em si para a estrutura das suas propriedades e relações. Tais atividades mentais construídas por parte de um estudante é fortemente dependente de sua própria atenção, sendo que se centra sobre as estruturas que estão a fazer parte do conceito abstrato, e desviam-se dos que são irrelevantes no contexto pretendido, a estrutura se torna importante, enquanto detalhes irrelevantes são omitidos, reduzindo assim a complexidade da situação” (DREYFUS, 1991, p. 37)⁸.

Segundo o autor, na sala de aula, uma maneira do professor chamar a atenção dos alunos sobre o que é importante considerar para se fazer uma abstração, deve ser realizado por meio de vários exemplos permitindo que os alunos identifiquem pontos em comum, propriedades e relações. Isso pode ser feito com a ajuda de imagens visuais apropriadas que são construídas para um determinado objeto matemático nos alunos envolvidos na abstração.

⁸ “It requires the ability to shift attention from the objects themselves to the structure of their properties and relationships. Such constructive mental activity on the part of a student is heavily dependent on the student’s attention being focussed on those structures which are to form part of the abstract concept, and drawn away from those which are irrelevant in the intended context; the structure becomes important, while irrelevant details are being omitted thus reducing the complexity of the situation.” (DREYFUS, 1991, p.37)

Ao comparar os processos de *representação* e *abstração*, Dreyfus (1991) afirma que tais processos são complementares, mas em sentidos opostos, pois “por um lado, um conceito muitas vezes é abstraído das suas várias representações, por outro lado representações são sempre representações de um conceito mais abstrato” (DREYFUS, 1991, p. 38)⁹.

A seguir apresentamos um quadro síntese com os principais processos envolvidos no pensamento matemático avançado, definidos por Dreyfus (1991):

Quadro 01: Síntese dos processos envolvidos no Pensamento Matemático Avançado

PROCESSOS ENVOLVIDOS NA REPRESENTAÇÃO	
Representar	Significa gerar um exemplo, uma amostra ou a imagem disso. Existem representações mentais e representações simbólicas.
Traduzir	Transitar por entre as representações de um conceito matemático.
Modelar	Representar matematicamente um objeto não matemático.
PROCESSOS ENVOLVIDOS NA ABSTRAÇÃO	
Generalizar	Derivar ou induzir a partir de indícios, para identificar pontos em comum, expandindo domínio de validade.
Sintetizar	Combinar ou compor partes para formar um todo.
Formalizar	Criar procedimentos padronizados.
Provar	Argumentar por meio de uma sequência lógico dedutiva.

Fonte: do autor.

Estes processos serão utilizados para analisar a produção escrita dos estudantes.

⁹ “On the one hand, a concept is often abstracted from several of its representations, on the other hand representations are always representations of some more abstract concept” (DREYFUS, 1991, p. 38).

ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO

Pretendemos realizar este trabalho por meio de uma pesquisa qualitativa seguindo as características apresentadas por Bogdan e Biklen (1994). Utilizamos esta abordagem porque:

- a fonte dos dados será o ambiente natural, pois realizaremos esta pesquisa em uma sala de aula de uma universidade estadual do Paraná, em uma turma do 4º ano do curso de Matemática e a investigadora será o principal instrumento da coleta de dados, ou seja, a autora deste projeto será quem coletará os dados;

- a pesquisa será descritiva, pois os dados que serão recolhidos são registros escritos nos quais apresentarão resoluções de exercícios e descrições destes escritos pelos estudantes;

- o interesse da pesquisa é nos processos e não somente nos resultados, pois buscamos identificar, analisar e discutir segundo o referencial teórico escolhido, quais características do pensamento matemático avançado são apresentadas pelos estudantes;

- os dados serão analisados de forma indutiva, pois as características vão emergir a partir das análises dos registros escritos dos estudantes;

- estamos interessados em como as pessoas dão significado às coisas, sendo o significado de grande importância neste trabalho, pois estaremos verificando os processos evidenciados nas resoluções das questões.

Será elaborada uma sequência de questões, explorando os processos mentais que o Pensamento Matemático Avançado oferece. Tal sequência constituirá como principal instrumento de coleta de dados que será realizada com os alunos do quarto ano do curso de graduação em Matemática de uma universidade do estado do Paraná.

Para análise dos registros escritos feitos pelos estudantes, utilizaremos procedimentos à luz da Análise de Conteúdo, que segundo Bardin (1977)

é um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (p.42).

Para que a aplicação do método esteja coerente, é necessário que a análise de conteúdo tenha como princípio uma organização, de acordo com Bardin (1977), possuindo três fases: 1) a pré-análise; 2) a exploração do material e 3) o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.

A pré-análise é a fase da organização e tem por objetivo sistematizar as ideias iniciais. Deve-se estabelecer um programa que seja flexível e preciso. Para isso é necessária uma leitura flutuante ao estabelecer um primeiro contato com os documentos que serão analisados, surgindo as primeiras hipóteses e objetivos para a pesquisa. A escolha dos documentos de análise pode ser determinado *a priori* ou pode ser escolhido aqueles documentos que oferecem informações para o problema levantado. O passo seguinte a escolha, é a constituição do *corpus*, que “é o conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos” (BARDIN, 1977, p.96). Aqui é preciso seguir algumas regras para que o conjunto de documentos a serem analisados produza resultados válidos.

A fase da exploração do material consiste na efetivação das decisões tomadas na pré-análise. É uma fase longa e cansativa e “consiste essencialmente de operações de codificação, desconto ou enumeração, em função de regras previamente formuladas” (BARDIN, 1977, p. 101).

O tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação consiste no tratamento estatístico dos resultados, permitindo a elaboração de tabelas, diagramas e figuras que condensam e destacam as informações fornecidas para a análise. Estando a disposição os resultados ao analista, este poderá sugerir inferências e interpretações a respeito dos objetivos previstos, assim como a confrontação com o material teórico.

A análise dos registros escritos consistirá em investigar se os alunos apresentam características do Pensamento Matemático Avançado, segundo a teoria de Dreyfus (1991), esperando que com a sequência de questões os alunos possam abstrair.

Dessa maneira, percebe-se que a abordagem qualitativa está em consonância com o principal objetivo, que para ser atingido precisaremos:

- Desenvolver um questionário elaborado com questões escolhidas das provas analisadas do ENADE com estudantes de um curso de graduação em Matemática.
- Identificar e analisar os processos do pensamento avançado em produções escritas dos estudantes utilizando a metodologia da Análise de Conteúdo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Edições 70. Lisboa, 1977.

DREYFUS, Tommy. **Advanced Mathematical Thinking Processes**. In: TALL, David. *Advanced Mathematical Thinking*. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 1991, pp.25-41.

BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sari K. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução a teoria e aos métodos**. Lisboa: Porto Editora, 1994. 336 p.

FAINGUELERNT, E. K. **Educação Matemática: representação e construção em geometria**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

HAREL, G.; SELDEN, A.; SELDEN, J. **Advanced mathematical thinking**. In: A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers, 2006, p.147-172.

Disponível em:

[http://books.google.com.br/books?id=OTCsKu0BZ0kC&pg=PA171&lpg=PA171&dq=HAREL,+G.;+SELDEN,+A.;+SELDEN,+J.+Advanced+mathematical+thinking.+In:+A.+Gutiérrez+%26+P.+Boero+\(Eds.\),+Handbook+of+research+on+the+psychology+of+mathematics+education:+Past,+present+and+future.&source=bl&ots=4rMnyIRLEv&sig=7ZCLH_-QRgi81pzwv0MwGbYRNZo&hl=pt-BR&sa=X&ei=2DrFT8_ZBcLSgQeW1bi_CQ&ved=0CGIQ6AEwBw#v=onepage&q&f=false](http://books.google.com.br/books?id=OTCsKu0BZ0kC&pg=PA171&lpg=PA171&dq=HAREL,+G.;+SELDEN,+A.;+SELDEN,+J.+Advanced+mathematical+thinking.+In:+A.+Gutiérrez+%26+P.+Boero+(Eds.),+Handbook+of+research+on+the+psychology+of+mathematics+education:+Past,+present+and+future.&source=bl&ots=4rMnyIRLEv&sig=7ZCLH_-QRgi81pzwv0MwGbYRNZo&hl=pt-BR&sa=X&ei=2DrFT8_ZBcLSgQeW1bi_CQ&ved=0CGIQ6AEwBw#v=onepage&q&f=false). Acesso em: maio.2012.

LORENZATO, Sérgio. **Por que não ensinar Geometria?** Educação Matemática em Revista, SBEM, n.4, p.3-13, set./1995. Edição Especial. Disponível em: <http://www.geometriadinamica.kit.net/Lorenzato.pdf>. Acesso em 07 de fev. de 2011.

RESNICK, Lauren B. **Education and learning to think**. Washington: National Academy Press, 1987. 62 p.