Do Paradoxo de Zenão aos Sentidos e Significados de Conceitos Matemáticos

Lucia Cristina Silveira Monteiro[1]

Michael Friedrich Otte[2]

GD11-Filosofia em Educação Matemática

Resumo

A presente pesquisa tem por objetivo compreender a natureza de alguns objetos matemáticos em diferentes momentos históricos, inicialmente buscando diferentes aspectos diante de um mesmo problema. Para alcançar tal alvo será desenvolvida uma pesquisa bibliográfica em torno de um problema clássico, presente em diferentes momentos do desenvolvimento do pensamento matemático, conhecido como o paradoxo de Zenão. Esse estudo será iniciado pela obra de Bertrand Russel, intitulada *Nosso Conhecimento do Mundo Exterior*, pelas obras de Michael Otte, com destaque para a importância do conceito de complementaridade na construção dos conceitos científicos e especificamente a complementaridade entre Aritmética e Geometria. Nesse sentido obras que esclarecem a importância da complementaridade entre os aspectos operatórios e descritivos dos conceitos matemáticos serão investigados. Outras obras, como o trabalho de Eudoxo em *os Elementos de Euclides* serão visitadas em busca da relação com outras obras como a de Dedekind e as ideias que aritmetizaram a Matemática. Essa compreensão será perseguida sob o olhar das categorias da dialética, realidade e possibilidade, movimento e mudança, construindo abordagens para os conceitos matemáticos buscando complementariedade entre Paradoxos, Geometria, Aritmética, sentidos e significados nas representações matemáticas na atualidade.

Palavras-chave: Paradoxo de Zenão. Geometria e Aritmetização. Complementaridade.

Introdução

Tradicionalmente, a matemática é apresentada como um conjunto de trabalhos completos e teorias terminadas. As perguntas sem respostas, os problemas conflituosos são excluídos das abordagens. Essa forma de apresentar a matemática não estimula o espírito da criatividade e de verdade, naqueles que buscam esse conhecimento. A perspectiva histórica é essencial ao espírito de verdade e de criatividade, pois, perceber a mudança das coisas, das representações das compreensões sobre um mesmo objeto, nos ajuda a vê-las mais claramente.

[1] Licenciada em Matemática pela UFAL, mestra em psicologia cognitiva pela Universidade Federal de Pernambuco, atualmente, doutoranda pela Universidade Bandeirante de São Paulo Orientanda do Prof. Dr. Michael F. Otte, e Professora assistente da Universidade Federal de Alagoas (UFAL). – lucia.csmonteiro@uol.com.br

[2] Professor Pesquisador e orientador do programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo. - michaelontra@aol.com

Até a metade do século XIX, os matemáticos estavam na maior parte divididos de acordo com visões, que indicavam se a matemática lidava com significados reais, como geometria ou com a mecânica, ou se era resultado de nossa construção mental, como a aritmética. “O número é somente o produto de nossa mente, *o espaço tem uma realidade externa à nossa mente*, e nós não podemos prescrever suas leis de maneira *à priori*” (OTTE, JAHNKE, 1981, p.30)

A axiomatização dos números começou por volta de 2000 anos depois da apresentação axiomática da geometria de Euclides, (1861, Hermann Grassmann, apud Otte, 2012). É importante entender que esta evolução histórica foi lenta, e que a construção desse conhecimento – passagem da observação da realidade concreta para abstração – exige grande esforço intelectual.

Observamos que o desenvolvimento formal da matemática provoca uma renúncia às afirmações sobre a objetividade ou realidade dos fatos. As teorias Matemática tornam-se funções formais, a serviço de hipóteses, e renunciam a explicações de coisas objetivas.
“Enquanto a nova axiomática, aquela que surgiu da geometria e da álgebra do século XIX, pode realmente ser vista somente como uma ferramenta – embora muito poderosa – do pensamento da teoria dos conjuntos, a axiomatização no sentido de Euclides, isso é redução lógica, análise e organização de noções inteligíveis e sentenças são ferramentas fundamentais e indispensáveis para pensá-lo”. Cesari (Apud Otte,2012)

As mudanças epistemológicas na construção do pensamento matemático trazem para a reflexão da Educação Matemática a necessidade de Complementaridade entre a axiomatização da geometria e axiomatização da aritmética, sendo necessário um diálogo entre as duas concepções. Sendo assim, aqui nesse projeto buscaremos investigar a complementariedade entre sistemas diferentes (símbolos e significados): geometria e aritmética; física e matemática, geometria e linguagem, e a complementariedade nas formas de perceber seja pelos aspectos operacionais ou descrição nas formas de se apropriar do objeto que se quer conhecer.

Para Chevallard et al. (2001) a sociedade em que vivemos é compreendida como uma construção humana ou obra humana, que por sua vez está repleta de outras construções, outras obras que evoluem com a sociedade. Nessa concepção, a escola e o que nela é ensinado, como o currículo, são obras abertas, em evolução, sempre inacabadas. Essas questões nos remetem a reflexão sobre quais seriam as matemáticas apropriadas, no sentido de adequação, nesse momento histórico, em uma sociedade globalizada, imersa no paradigma do conhecimento e no paradigma da mudança, mais especificamente, para esse projeto, a questão: *que tipo de problema pode levar a compreensão da natureza da matemática explorando aspectos descritivos e operacionais, construindo uma abordagem através da complementaridade entre conceitos*?

Na visão de Kuhn (2001) há necessidade de se aguçar os olhares diante de novos paradigmas para que se possam rastrear por vários campos do conhecimento, suas formas de desenvolvimento e que diante desses novos referenciais, muitas outras abordagens possam ser explicitadas. Esse teórico também afirma que um paradigma é um pré-requisito para a própria percepção. E, o que o ser humano vê, depende tanto daquilo que ele olha como daquilo que sua experiência visual conceitual prévia o ensinou a ver. Para os processos de ensino e aprendizagem é necessário atentar e estimular essa percepção, partir do que é significativo para o sujeito.

Otte (2012) destaca o desenvolvimento ontológico da Matemática relativo à natureza da Matemática e dos objetos matemáticos sustentados pelas mudanças epistemológicas, e afirma que "houve uma mudança de abordagens direta ou construtiva, para indireta e analítica, e uma mudança do raciocínio instrumental para o pensamento relacional." (p.127). Em sua recente publicação, esse autor esclarece que desde a obra de Euclides (Séc III a.C.) o principal referencial para a elaboração do pensamento matemático durante séculos, se referia ao que era considerado como verdade auto evidente. Com o desenvolvimento do formalismo matemático, desde o século XIX, os fundamentos do edifício matemático tornaram-se meras hipóteses, que seriam justificadas por suas possíveis consequências.

Destacaremos então, para o início dessa pesquisa a investigação desses dois momentos cruciais no desenvolvimento da Matemática, e atentaremos para a compreensão da atribuição de significados dos conceitos envolvidos, assim como as ideias que os sustentaram.

Uma das principais distinções entre os diferentes momentos históricos, ou seja, entre os períodos que consideraremos para analisar o desenvolvimento do conhecimento matemático, desde a tradição grega, até os dias atuais, encontramos as ideias do que é contínuo e do que é discreto. Para aprofundarmos o olhar sobre essa questão, tomaremos, inicialmente, um problema que se caracteriza como sendo um divisor de águas para reflexões sobre a noção de contínuo e de discreto, conhecido como *paradoxo de Zenão*[3]. Para essa reflexão, palestras proferidas por Bertrand Russel, como, por exemplo, as apesentadas em seu livro intitulado *Nosso conhecimento do mundo exterior*, serão consideradas.

Nesse trabalho nos interessa inicialmente alguns aspectos como a análise sobre as formas diferentes de se perceber o problema empiricamente, ou respostas que desconsideram uma realidade física e não vê o problema como uma situação realizável. Ou mesmo os sujeitos que se permitem oscilar entre uma e outra possibilidade.

Segundo Otte (1990) esse problema clássico demonstra claramente a necessidade de complementaridade entre aritmética e geometria ou do sentido do que é discreto e do que é contínuo na elaboração do pensamento científico. Aqui nesse projeto consideraremos relevante para a educação matemática problemas desse tipo, e diferentes formas de representa-lo quando percebidos no mundo fenomenológico na atualidade, e não somente como objetos matemáticos distintos como sugerem muitos tratamentos dados, limitando-se a um único sistema símbolos.

Fundamentação Teórica

Na história as primeiras argumentações que conhecemos a respeito da obra de Zenão são através de Aristóteles que as expôs a fim de refutá-la. Segundo Otte (2003) com referência ao livro de Aristóteles, o núcleo do paradoxo de Zenão é a ideia de que, para que Aquiles recupere o atraso com a tartaruga, deve primeiro realizar um número infinito de atos. Mas Aristóteles nega este argumento em razão da sua concepção da continuidade ininterrupta do movimento como um todo. Diz, movimento é "claramente uma das coisas que nós pensamos como contínuo e está em conexão com a continuidade que, primeiro, encontra o conceito de ilimitado" (Aristóteles, Física, livro III, capítulo 2).

---

[3] Esse paradoxo é descrito por Black (apud Otte, 1990, p.55) da seguinte forma: suponhamos que Aquiles corre dez vezes mais rápido que a tartaruga e lhe dá cem metros à frente antes de iniciar uma corrida. A fim de ganhar, Aquiles deve primeiro compensar o seu espaço inicial, ou seja, a vantagem de cem metros dada à tartaruga, mas quando ele faz isso e chega ao ponto onde a tartaruga começou, o animal teve tempo para avançar dez metros, enquanto Aquiles corre esses dez metros, a tartaruga avança um metro adiante, Aquiles ao ultrapassa esse espaço a tartaruga avança um décimo à frente, e assim por diante, sem fim. Aquiles nunca alcançará a tartaruga, porque a tartaruga sempre tem uma vantagem, ainda que pequena. O problema de Zenão é colocado como um paradoxo do movimento.

Para Aristóteles, assim como para Platão, matéria e espaço são mesma coisa, portanto, nem espaço nem o continuo são vistos como um objeto e lugar ou tempo é uma relação. Mais tarde Galileu interpreta como Aristóteles, ou seja, em termos de duas séries de intervalos correspondentes nas escalas de tempo e distância, e atualmente o passo essencial dado pela Matemática, a sintetização dessas correspondências em um objeto matemático, ou melhor, uma fórmula algébrica.

Segundo Otte (1990, p.56) existem modernas soluções matemáticas para os paradoxos de Zenão, que são bem de acordo com as ideias de Aristóteles, embora comumente se interprete o pensamento relacional em termos de continuidade de funções algébricas.

O psicólogo da Gestalt Max Wertheimer (1880-1943) comenta sobre a apresentação e solução de paradoxos de Zenão, por meio de uma série geométrica, ou melhor, ele critica a prova atual da convergência da série, que é realizada pela multiplicação da série por a e subtraida em seguida. Conjunto $S = 1 + a + a^2 + \cdots$ então, $S - aS = 1 \ or \ S = \frac{1}{1-a}$. Comenta que a multiplicação da série $(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots)$ por a sendo subtraída da série inicial, fornece os resultados, mas não dá a compreensão de como a série contínua aproxima-se deste valor no seu crescimento. A compreensão real do procedimento, considerando o que acontece no crescimento da série descreve a lei desse crescimento, conduzindo a outra noção, o limite.

Segundo Otte (2003) o fato essencial e bastante prejudicial sobre a abordagem de Wertheimers reside no seu fundacionalismo e psicologismo. No final, ele quer reduzir o conceito de "série" (A) para o conceito de "fração" (B), que ele considera o significado básico e essencial. Uma abordagem complementarista seria, no entanto, salientar a simetria entre (A) e (B). Em vez de reduzir (A) a (B) pode-se, por exemplo, interpretar uma fracção decimal periódica como uma série geométrica, que resultam diretamente destas frações decimais que representam números racionais.

Também considerando que "O problema de lógica é muito direto: como pode uma proposição dizer algo sobre si mesmo?" O ponto de partida deste problema é o pressuposto de que toda proposição implica imediatamente em si própria. Se eu digo "p é verdadeiro", isto significa "p" é verdadeiro. Nada é adicionado à proposição "p" pelas palavras "é verdade". Nada é adicionado para provar, afirmando que a proporição está correta. Caso contrário, entrará em regressão infinita e ficará presa à argumentação de Zenão.

Aqui nesse trabalho consideraremos relevante a afirmação de que o conhecimento é uma atividade humana, e que, afinal, o sujeito humano tem suas próprias razões e motivações.

Com o desenvolvimento dos símbolos matemáticos se compreende que a Matemática lida com coisas ideais e não reais. Hoje, sabemos que a Matemática é uma das maneiras com que sistematizamos e analisamos nossos próprios pensamentos, é semelhante até a um processo que reflete sobre si mesmo. Matemática é, em certo sentido, meta-Matemática ou meta-conhecimento.

Otte (2003) se refere à complementaridade, lembrando que foi introduzido por Niels Bohr, pra descrever fenômenos físico-quânticos de forma mais acessível, iniciou falando na interação entre os aparelhos de medição e os objetos como constituintes essenciais do fenômeno físico. Otte explicita que a complementaridade é um conceito fundamental em sua obra e explicita diferentes formas, como: entre objeto e meio, entre intencionalidade (consciência) e comunicação, entre função e estrutura, entre forma e história, etc. Kant (apud Otte, 2003), escreve na *crítica da razão pura* que

> [...] nosso conhecimento surge de duas fontes básicas da mente: a primeira recebe as concepções (receptividade das impressões) e a segunda é a capacidade de reconhecer um objeto por meio dessas concepções (espontaneidade dos conceitos); a primeira nos dá um objeto, a segunda nos permite pensa-lo em relação àquela concepção. Intuição e conceitos são assim os elementos de todo nosso conhecimento, de modo que, nem conceito sem as correspondentes intuições, nem intuições sem conceitos podem produzir conhecimento[...] (p.220)

Para Kant, nas ciências discursivas, ele inclui a filosofia e a lógica, e na ciência intuitiva, a Matemática. As primeiras se baseiam no conhecimento do conceito e a matemática ao contrário na intuição do objeto conceitual. Então, o conhecimento matemático considera o geral no particular e o filosófico, ao contrário, o particular no geral.

Na tentativa de explicar o conceito de complementaridade (Otte, 2003) resume-se em perseguir e explicar um fenômeno universal ou geral em suas manifestações particulares, então, é possível conceber a polaridade entre aritmética e geometria como uma primeira visualização da ideia de complementaridade na Matemática.

> "Quando se deseja progredir da dualidade ou polaridade como ainda ocorre em Kant, para uma genuína complementaridade, pela qual cada um dos elementos polares tanto diferencia-se do outro como o abrange, então, é preciso, colocando a atividade como a essência da relação sujeito-objeto, procurar descrever a dinâmica dessa atividade como uma entidade independente, que se diferencia tanto da consciência quanto da realidade objetiva. Esta dinâmica fundamenta-se exatamente na complementaridade entre os meios e os objetos do conhecimento. Agora trata-se efetivamente de uma verdadeira complementaridade e não de uma mera dualidade, porque nenhum dos dois elementos, meio e objeto, pode ser determinado sem o outro, apesar deles desempenharem, num determinado momento de um certo ato epistemológico individual, um papel completamente assimétrico. (Otte, 2003, p.224)

Nesse projeto buscaremos complementariedade entre os aspectos operatórios e os aspectos descritivos na representação de problemas como o de Zenão, objetivando a compreensão de como construir abordagens para os conceitos matemáticos relacionando Geometria e Aritmética.

Objetivo Geral

Identificar problemas que estimulem a compreensão da natureza da matemática, explorando a complementaridade nas representações.

Objetivos específicos:

Compreender como diferentes interpretações do problema de Zenão podem contribuir para o desenvolvimento da compreensão dos conceitos Matemáticos; Investigar diferentes interpretações dadas ao problema de Zenão; Elaborar versões possíveis, em diferentes sistemas de representações, para a compreensão de conceitos matemáticos, possíveis de serem explorados nesse problema; Identificar estruturas matemáticas referentes à natureza da matemática em diferentes períodos da história do conhecimento científico; Investigar conceitos fundamentais para a construção da matemática como proporção, distância, número, infinito, infinitésimo, continuidade, etc., e sua relação com esse tipo de problema; Identificar fenômenos em contextos culturais e acadêmicos, que estimulem a percepção para paradoxos aparentes; Compreender como combinar representações dos objetos matemáticos produzidos historicamente.

Metodologia

A pesquisa será iniciada com uma revisão bibliográfica, às obras que citam diferentes interpretações do Paradoxo de Zenão, buscando identificar os diferentes tratamentos matemáticos dados aos conceitos intrínsecos ao problema, no movimento histórico da interpretação desse paradoxo. A abordagem histórico-dialética será adotada a princípio para análise.

A abordagem histórico-dialética como método de observação e análise deve levar em consideração as duas características essenciais: Richardson (1999, p. 46-47), se refere a elas, afirmando ser "o materialismo dialético a única corrente de interpretação dos fenômenos sociais que apresenta princípios, leis e categorias de análise". No método dialético destacam-se como principais características: *Princípio da conexão universal dos objetos e fenômenos.* O surgimento de um fenômeno, o seu desenvolvimento e a sua mudança, só são possíveis através das interações e conexões com outros fatos e fenômenos; *Princípio de movimento permanente e do desenvolvimento.* Tudo que existe no universo está em movimento. São as contradições internas que determinam o movimento de objetos e fenômenos. O desenvolvimento se dá na luta dos contrários, sendo resultado de acumulação de mudanças, tanto qualitativas como quantitativas, que ocasionam as transformações qualitativas.

Mas, e o método dialético? Para esse conceito é necessário registrar que a dialética nos fornece os fundamentos para fazermos um estudo em profundidade, visto que o método dialético requer o estudo da realidade em seu movimento, analisando as partes em constante relação com a totalidade.

Buscaremos combinações entre as contradições e complementaridade entre as questões e autores estudados e a percepção de relações conceituais, que possibilitem um diálogo para a compreensão de conceitos matemáticos explorando paradoxos, entendendo a Educação Matemática como área de pesquisa para o desenvolvimento integral do indivíduo, incluindo o desenvolvimento de processos cognitivos avançados, como a criatividade.

Assim, serão exploradas as possibilidades de elaboração de outros problemas a partir dos paradoxos, destacando conceitos identificados na estrutura da apresentação e das soluções conhecidas e propostas para o problema, em diferentes sistemas.

Também haverá uma investigação sobre de que forma os resultados encontrados nas situações exploradas podem contribuir para reflexão em outros contextos da realidade e em outras disciplinas, assim como também, explorando o uso de tecnologias.

A perspectiva marxista coloca o movimento como atributo da matéria, sua propriedade fundamental, e concebe que "a matéria sem o movimento é tão inconcebível quanto o movimento sem matéria" (Engels, p. 92 in Cheptulin, 1982, p.163). Nessa perspectiva, proponho aqui nessa pesquisa conceber os objetos do conhecimento humano como matéria em movimento na história e, portanto, na sociedade.

Referências Bibliográficas

BETH, H. *Foundations of mathematics*, New York: Harper & Row, 1966.

CARAÇA, B. de J. *Conceitos fundamentais da matemática*. 6. ed. Lisboa: Gradiva, 2002.

CHEPTULIN, A. *A Dialética Materialista:* Categorias e Leis da Dialética. São Paulo: Alfa-ômega. 1982.

CHEVALLARD, Y. Bosch, M. & Gascón, J. *Estudar Matemáticas*: *o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed. 2001.

DANTE, L. R. *Incentivando a criatividade através da educação matemática*. PUC-SP, 1980. Tese de Doutorado.

DEMO, Pedro. *A educação do futuro e o futuro da educação*. Campinas, SP: Autores Associados, 2005.

EUCLIDES. *Os elementos/Euclides*; tradução e introdução de Irineu Bicudo. – São Paulo UNESP, 2009

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Campinas, SP: UNICAMP. 1997.

KANT, I. *Crítica da razão pura*. São Paulo, SP: Martim Claret, 2001.

KOYRÉ, Alexandre. *Estudos de história do pensamento filosófico*; Tradução: de Maria de Lourdes Menezes. – 2.ed.-Rio de Janeiro: Forense, 2011.

KUHN, Thomas S. *A estrutura das revoluções científicas*. São Paulo, Editora Perspectiva. 2001.

KLINE, Morris. *O fracasso da matemática moderna*. Trad. Leônidas Gontijo de Carvalho. São Paulo: IBRASA, 1976.

LAKOFF, George, NÜÑEZ, Raphael E. *Where Mathematics comes from:* how the embodied mind brings mathematics into being. New York: Basic Books. 2000.

OTTE, M. *A Realidade das Idéias: uma perspectiva epistemológica para a Educação Matemática*. Cuiabá, MT, EdUFMT, 2011.

OTTE, M. *Complementarity, sets and Numbers*. ESM, v.53, p.203-228, 2003.

OTTE, M. *O Formal, o social e o subjetivo*. São Paulo, SP, Unesp, 1993.

OTTE, M. *Arithmatic and Geometry:* Some Remarks on the concept of complemetary. In Studies in Philosophy and Education, nº 10. pp 37-62, Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands. 1990

RICHARDSON, R.J. *Pesquisa Social, Métodos e Técnicas*. São Paulo, Ed. Atlas. 1999.

RUSSEL, B. A. W. *Nosso conhecimento do mundo exterior*: estabelecimento de um campo para estudos sobre o método científico em filosofia; trad. De R. Haddock Lobo.São Paulo, Editora Nacional, 1966.

SILVA, J. J. *Filosofias da matemática*. São Paulo:UNESP, 2007.

SKOVSMOSE, Olé. *Desafios da reflexão em educação matemática crítica*. Tradução: Orlando de Andrade Figueiredo, Jonei Cerqueira Barbosa. – Campinas, SP: Papirus, 2008.

TORRANCE, E. P. *Pode-se ensinar criatividade?* E.P.U., São Paulo, 1974.

VAZQUEZ, A.S. *Filosofia da Práxis*. 3. ed. Rio de Janeiro, Editora Paz e Terra. 1977.

VYGOTSKY, L.S. *A formação social da mente.* São Paulo: Martins Fontes. 2000.

WACHOWICZ, L.A. *O Método Dialético na Didática*. Campinas, São Paulo: Cortez. 1995.