

# O Ensino e Aprendizagem da Geometria Analítica e os Registros de Representação Semiótica

Joseide Justin Dallemole<sup>1</sup>

Claudia Lisete Oliveira Groenwald<sup>2</sup>

GD3- Educação Matemática no Ensino Médio

## Resumo

Este artigo faz parte da pesquisa, com enfoque qualitativo, a ser desenvolvida para o doutorado em Ensino de Ciências e Matemática, da ULBRA, que visa investigar o conteúdo de Geometria Analítica no atual sistema de Ensino Médio e as possibilidades didático-pedagógicas de uma proposta metodológica articulada com a teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Duval. Os dados serão coletados através análise das propostas curriculares para o conteúdo de Geometria Analítica para o Ensino Médio das escolas públicas do Rio Grande do Sul com as melhores médias em Matemática no Exame Nacional do Ensino Médio, do ano de 2010; entrevistas com os professores de Matemática das escolas selecionadas; análise da abordagem de questões de Geometria Analítica das provas do ENEM de 2010 e 2011; análise dos livros didáticos para o Ensino Médio, aprovados pelo Plano Nacional do Ensino Médio do ano de 2012; pesquisa das políticas públicas sobre o conteúdo de Geometria Analítica. Serão utilizados, também, na análise dos dados, filmagens durante o experimento com a sequência didática eletrônica com o grupo de alunos de uma turma do Ensino Médio, protocolo das observações dos encontros presenciais e produções dos alunos investigados.

**Palavras-chave:** Geometria Analítica. Registros de Representação Semiótica. Ensino e Aprendizagem.

## Introdução

Segundo Eves (2007) as ideias concebidas por Descartes e Fermat acerca da Geometria Analítica moderna constituem um método de enfrentar problemas geométricos. Para o autor, a essência dessas ideias, quando aplicada ao plano, consiste em estabelecer uma correspondência entre pontos do plano e pares ordenados de Números Reais, viabilizando assim uma correspondência entre curvas do plano e equações em duas variáveis. Além disso, estabelece-se uma correspondência entre as propriedades algébricas e analíticas da equação e as propriedades geométricas da curva associada. Dessa forma, passou-se da tarefa de provar um teorema em geometria para a de provar um teorema correspondente em álgebra e análise. A ideia de coordenada, segundo Eves (2007), já foi usada no mundo antigo pelos egípcios e os romanos na agrimensura e pelos gregos na confecção de mapas.

O ensino da Geometria Analítica, objeto de estudo no Ensino Médio e Superior está

---

<sup>1</sup>Doutoranda e bolsista da Capes do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil- campus Canoas-RS – jldallemole@yahoo.com.br

<sup>2</sup> Professora e Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil- campus Canoas-RS – claudiag@ulbra.br

presente em muitas áreas da Ciência, como na Medicina em exames por imagem computadorizadas, na Engenharia desde a fabricação de peças de aço até a construção de cenários virtuais, na Astronomia, no GPS, nos radares dos aeroportos e dos aviões, na Física em movimentos de corpos em função do tempo.

Segundo Iezzi et al. (2010) a Geometria Analítica desempenha papel importante no desenvolvimento da computação gráfica. Os autores comentam que as telas dos nossos computadores são modelos de estrutura do plano cartesiano com um número finito de pontos, ao aumentar o número de pontos, melhora-se a qualidade da imagem do monitor e da impressão dessa imagem.

Especificamente para a Geometria Analítica Brasil (2006) afirma que esta possibilita a articulação entre a geometria e álgebra, devendo o professor trabalhar o entendimento de figuras geométricas por meio de equações, e o entendimento de equações por meio de figuras geométricas, abandonando a simples apresentação de equações sem explicações fundadas no raciocínio lógico, evitando memorizações excessivas de fórmulas. Evidencia-se nesta afirmação, com base na teoria dos Registros de Representação Semiótica, uma necessidade de utilização de diferentes Registros de Representação Semiótica, o registro gráfico e o registro algébrico, e um trabalho que promova a articulação, ou seja, a conversão entre esses registros.

De acordo com Dallemole (2010), que realizou uma pesquisa com alunos de Licenciatura em Matemática, constatou que estes ainda apresentam dificuldades em realizar tratamentos e conversões entre os registros língua natural, representação algébrica e representação gráfica envolvendo os conteúdos de Geometria Analítica, mesmo já tendo visto tais conceitos no Ensino Médio. Silva (2006) constatou que muitos alunos do Ensino Médio mostram dificuldades em articular com as diversas representações gráficas e algébricas de curvas planas, além da dificuldade para compreender a diferença entre o objeto matemático e sua representação.

Entende-se que o conteúdo de Geometria Analítica por si só contém uma diversidade de registros semióticos que devem ser explorados em seu processo de ensino e aprendizagem e considera-se a teoria dos Registros de Representação Semiótica como uma possibilidade para o educador desenvolver situações de ensino e aprendizagem que enfatize a diversidade de registros de representação que possui a Geometria Analítica e a articulação entre eles, para que o aluno compreenda e realize os diferentes processos cognitivos requeridos por este conteúdo matemático.

Assim, a partir destes pressupostos e ciente da importância da Geometria Analítica para diferentes áreas das Ciências, considera-se necessário investigar este tema no atual sistema de Ensino Médio, bem como, seu processo de ensino e aprendizagem e como desenvolver uma proposta metodológica articulada com a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, buscando contribuir para o processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo.

## **Objetivos**

O objetivo geral da pesquisa é investigar o conteúdo de Geometria Analítica no atual sistema de Ensino Médio e as possibilidades didático-pedagógicas de uma proposta metodológica articulada com a teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo, no currículo de Matemática do Ensino Médio.

Para alcançar o objetivo geral foram traçados os seguintes objetivos específicos:

- a) Identificar quais conteúdos de Geometria Analítica são ensinados, quais os objetivos a serem alcançados com o estudo destes conteúdos, as metodologias utilizadas e se estas referem-se ao uso dos Registros de Representação Semiótica com tarefas de diferentes natureza de tratamentos e conversões entre os diferentes registros semióticos, quando são ensinados, e o que, como e quando estes conteúdos estão sendo avaliados, contrastando com as Políticas Públicas (Parâmetros Curriculares Nacionais e a Proposta Curricular de Matemática do Rio Grande do Sul) no que tange à Matemática e os conceitos de Geometria Analítica;
- b) Investigar os livros didáticos de Matemática, do Plano Nacional do Livro Didático 2012, para o Ensino Médio, no que tange a Geometria Analítica e os Registros de Representação Semiótica;
- c) Investigar como desenvolver uma sequência didática eletrônica, com os conteúdos de Geometria Analítica articulada com a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e com as principais tendências metodológicas para a área de Educação Matemática, que busque favorecer a compreensão e apreensão destes conteúdos no Ensino Médio e implementá-la na plataforma SIENA (Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem);
- d) Identificar o desenvolvimento de habilidades matemáticas e dificuldades que poderão ser apresentadas por um grupo de alunos de uma turma do Ensino Médio com a aplicação

de um experimento desenvolvido sobre os conteúdos de Geometria Analítica embasado na teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, e nas principais tendências metodológicas para a área de Educação Matemática;

### **Os Registros de Representação Semiótica**

Na teoria de Raymond Duval sobre Registros de Representações Semióticas, ele define representações semióticas como “produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento” (Duval, 1993 apud DAMM, 2002, p.143). Os trabalhos de Duval sobre os Registros de Representações Semióticas, de acordo com Machado (2003), tem servido de base para pesquisas concernentes à aquisição de conhecimentos matemáticos e à organização de situações de aprendizagem desses conhecimentos.

De acordo com Duval (2004, p. 43), “a formação de uma representação semiótica é o recurso a um signo para atualizar a visão de um objeto ou substituir a visão desse objeto”. D’Amore (2005) complementa, afirmando que o conhecimento é a intervenção e a utilização dos signos. Assim, para ele, na aprendizagem da Matemática, os alunos são introduzidos em um mundo novo, conceitual e simbólico, sobretudo representativo.

Os objetos matemáticos, segundo Duval (2003), não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos, seu acesso está ligado à utilização de um sistema de representação que os permite designar. Damm (2002) salienta que a Matemática trabalha com objetos abstratos, ou seja, não são diretamente perceptíveis ou observáveis, necessitando, para sua apreensão, o uso de representações através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos, pois permitem a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento matemático.

No entanto, ela preconiza que, para a compreensão da disciplina é fundamental que o aluno faça a distinção entre o objeto matemático e sua representação.

Sobre a aquisição conceitual de um objeto matemático D’Amore (2005), referindo-se a Duval (1993), afirma que essa se baseia em duas características fortes. A primeira está no fato de o uso de diversos Registros de Representação Semiótica ser típico do pensamento humano e a segunda, no fato da criação e o desenvolvimento de novos sistemas semióticos serem marcos históricos de progresso do conhecimento.

Para D’Amore (2005), essas características revelam a estreita interdependência entre noesis (aquisição conceitual de um objeto) e semiosis (representação realizada por

meio de signos) e como se passa de uma para outra. Assim, para o autor, “não apenas não existe noesis sem semiosis, mas a semiosis é assumida como sendo uma característica necessária para garantir o primeiro passo na direção da noesis” (D’AMORE, 2005, p.60).

Na Matemática, Duval (2004) afirma que ela permite uma grande variedade de representações: sistemas de numeração, figuras geométricas, escritas algébricas e formais, representações gráficas e língua natural. Assim, conforme Duval (2003, p.14), “a originalidade da atividade Matemática está na mobilização simultânea de, ao menos, dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar, a todo momento, de registro de representação.” Damm (2002) menciona que é somente através da coordenação de vários registros de representação, pelo indivíduo que apreende, que será possível a apreensão conceitual dos objetos matemáticos.

Segundo Duval (2003), existem quatro tipos diferentes de Registros de Representações Semióticas, conforme apresentadas na figura 1.

Figura 1 - quadro da classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático.

|  | Representação Discursiva   | Representação não-discursiva   |
|--|--|--|
| REGISTROS MULTIFUNCIONAIS:<br>Os tratamentos não são algoritmizáveis.      | Língua Natural<br>Associações verbais (conceituais).<br>Forma racional: argumentação a partir de observações, de crenças...; dedução válida a partir de definições ou uso de teoremas. | Figuras geométricas planas ou em perspectiva.<br>Apreensão operatória e não somente perspectiva;<br>Construção com instrumentos. |
| REGISTROS MONOFUNCIONAIS:<br>Os tratamentos são principalmente algoritmos. | Sistemas de escritas: numéricas (binárias, decimal, fracionária...); algébricas; simbólicas (línguas formais).<br>Cálculo  | Gráficos cartesianos.<br>Mudanças de sistema de coordenadas;<br>Interpolação, extrapolação.                                      |

(Duval, 2003, p.14).

Duval (2004) estabelece três atividades cognitivas inerentes a semiosis, ou seja, para que um sistema semiótico seja um registro de representação é necessária a formação de representações em um registro semiótico particular e as duas transformações de representações semióticas, uma denominada tratamento e a outra, conversão, as quais correspondem a atividades cognitivas diferentes.

A formação da representação de um registro está atrelada ao que Duval (2004) chama de regras de conformidade, definidas por ele como sendo “aquelas que definem um sistema de representação e, em consequência, os tipos de unidades constituídas de todas as representações possíveis em um registro” (DUVAL, 2004, p. 43). Assim, segue afirmando que essas regras permitem o reconhecimento das representações em um registro determinado e que a formação das representações semióticas implica “a seleção de um

certo número de caracteres de um conteúdo percebido, imaginado ou já representado em função das possibilidades de representação próprias ao registro determinado” (DUVAL, 2004, p. 44).

Com relação ao tratamento, Duval (2004) estabelece que é a transformação de uma representação inicial em outra representação terminal, respectiva a uma questão, a um problema, ou seja, é a transformação de uma representação dentro de um mesmo registro. Por exemplo, “efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria”(DUVAL, 2003, p. 16).

Já a conversão, para Duval (2004), é a transformação externa relativa ao registro da representação de partida, isto é, consiste em mudar de registro, conservando os mesmos objetos matemáticos, como, por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica ou de uma representação linguística a uma figural.

Damm (2002) considera que a conversão

[...] é um passo fundamental no trabalho com representações semióticas, pois a transformação de um registro em outro, conservando a totalidade ou uma parte do objeto matemático que está sendo representado, não pode ser confundida com o tratamento. O tratamento estabelece internamente ao registro, já a conversão se dá entre os registros, ou seja, é exterior ao registro de partida (DAMM, 2002, p.147).

Assim, no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, deve-se levar em conta não só a formação de representações e os tratamentos, como também, a conversão entre os diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático, e isso, de acordo com Damm (2002), estabelece um problema no ensino dessa disciplina, pois somente são levadas em consideração as duas primeiras atividades cognitivas.

Buscando diversificar situações que englobem atividades de conversão, o professor propiciará ao aluno não apenas que ele apreenda progressivamente conceitos matemáticos, mas contribuirá para que o mesmo evolua em suas capacidades de raciocínio, análise, visualização, interpretação e, conseqüentemente, para a sua formação enquanto cidadão.

### **Metodologia da Investigação**

Para o desenvolvimento desta investigação será adotado o enfoque qualitativo, conforme a abordagem de Bogdan e Biklen (1998). Para estes autores a abordagem qualitativa em uma pesquisa permite identificar características essenciais como, o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como instrumento fundamental; o

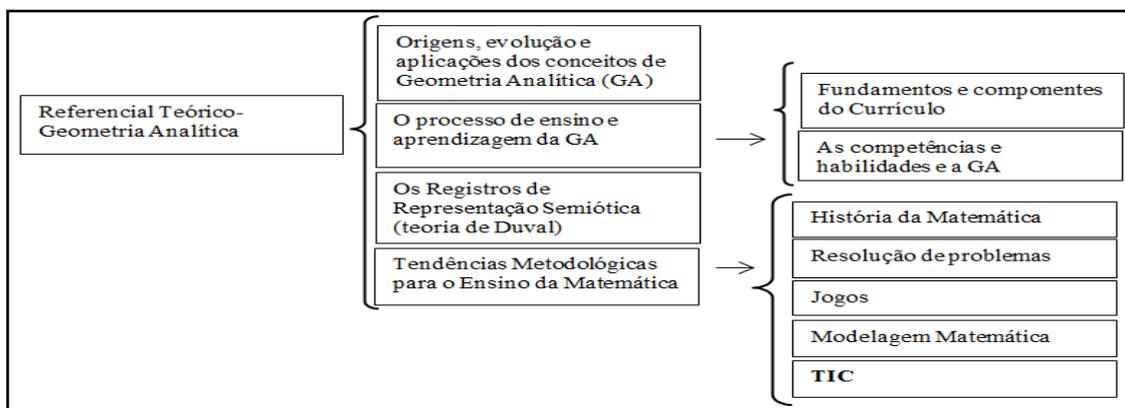
caráter descritivo; maior interesse pelo processo do que simplesmente pelos resultados; análise dos dados de forma indutiva e predominantemente descritiva, em que não há preocupação em quantificar os dados; o significado com importância vital neste tipo de abordagem.

Esta investigação terá o seu foco no processo de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica no Ensino Médio, ou seja, o que é estudado, como é estudado e quando é estudado, e na implementação (desenvolvimento, aplicação e avaliação) de um experimento com uma proposta metodológica articulada com a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e nas principais tendências metodológicas para a área de Educação Matemática, que busque contribuir para o processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo.

A presente pesquisa será desenvolvida seguindo as etapas descritas a seguir:

- a) levantamento bibliográfico sobre as origens e evolução dos conceitos da Geometria Analítica, aplicações da Geometria Analítica, o processo de ensino e aprendizagem do tema e fundamentação teórica, conforme apresenta-se no esquema da figura 2;

Figura 2- Referencial Teórico



- b) Seleção das escolas públicas do Rio Grande do Sul a serem investigadas as propostas curriculares para o Ensino Médio no que tange o conteúdo de Geometria Analítica, a partir dos resultados entre 5 e 6 para a disciplina de Matemática, no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) do ano de 2010 (critério para seleção das escolas);

- c) Análise documental das propostas curriculares das escolas pesquisadas identificando quais conteúdos de Geometria Analítica são ensinados, quais os objetivos a serem alcançados com o estudo destes conteúdos, como são ensinados (as metodologias utilizadas), quando são ensinados (em que momento do Ensino Médio), e o que, como e quando estes conteúdos estão sendo avaliados, contrastando-as com as Políticas Públicas

(Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e Proposta Curricular de Matemática do Rio Grande do Sul) no que se refere ao Ensino da Matemática e particularmente da Geometria Analítica.

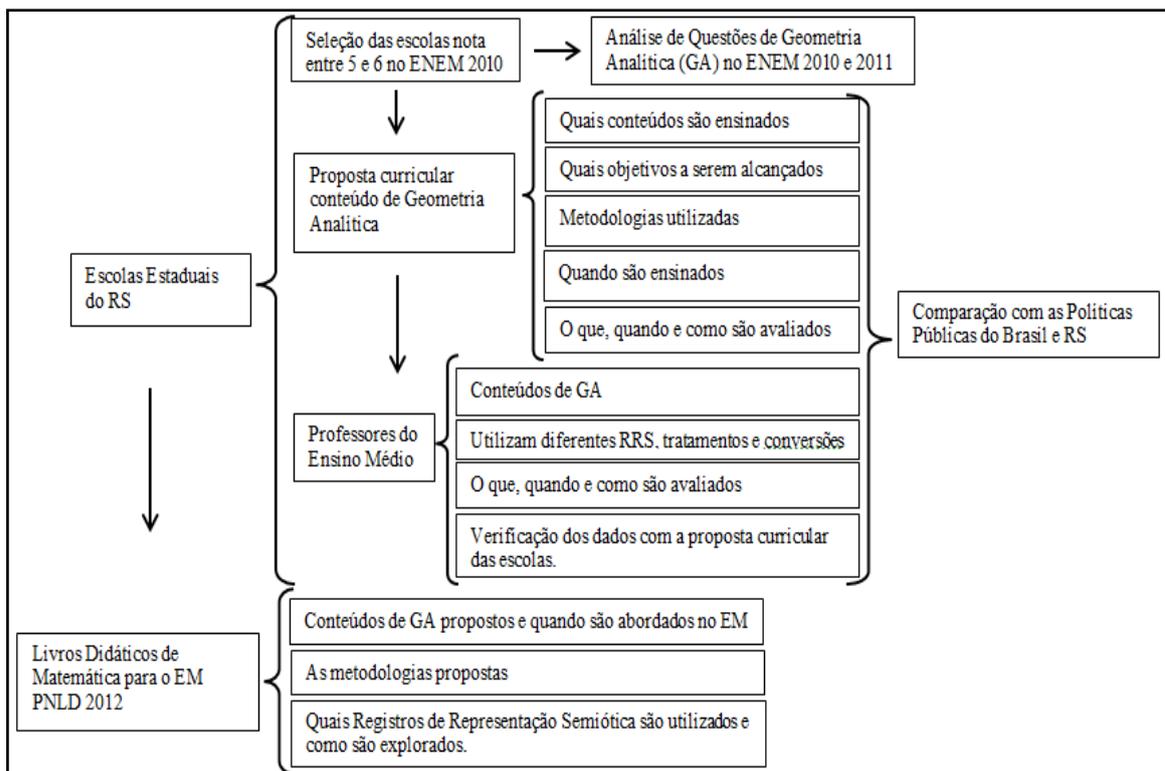
d) Entrevista com professores de Matemática do Ensino Médio de escolas públicas do Rio Grande do Sul, com médias entre 500 e 600 em Matemática, conforme os resultados do ENEM do ano de 2010, para identificar como estes desenvolvem o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos de Geometria Analítica, se procuram utilizar diferentes Registros de Representação Semiótica (RRS) e explorar tarefas de tratamentos e conversões entre esses registros, como e quando estes conteúdos são avaliados e se as propostas curriculares das escolas são seguidas.

e) Investigação e análise da abordagem de questões de Geometria Analítica das provas do ENEM de 2010 e 2011;

f) Investigação nos livros didáticos nacionais, para o Ensino Médio, aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD)/2012, para identificar os conteúdos de Geometria Analítica propostos, em que momento do Ensino Médio sugerem que sejam abordados e quais metodologias propõem para o ensino destes conteúdos, quais registros de representação semiótica são utilizados e como são explorados;

As etapas b, c, d, e, f estão representadas nos esquema da figura 3.

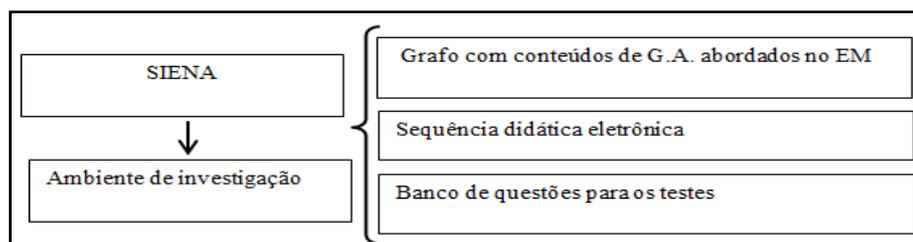
Figura 3- Dimensões de investigação



g) Implementação do ambiente de investigação, na plataforma SIENA, com as seguintes ações: 1) construção do grafo, com os conteúdos de Geometria Analítica abordados no Ensino Médio, com base nos dados coletados nas etapas anteriores, abordando os conteúdos de Geometria Analítica ensinados nas escolas pesquisadas, propostos pelos livros didáticos nacionais para o Ensino Médio e pelas políticas públicas (Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, Proposta Curricular de Matemática do Rio Grande do Sul); 2) desenvolvimento de uma sequência didática eletrônica, a partir do grafo construído, embasada na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e nas principais tendências metodológicas para a área de Educação Matemática; 3) construção do banco de questões para os testes adaptativos em cada nodo do grafo, de acordo com sequência didática desenvolvida, os quais serão realizados pelos alunos após a aplicação da sequência didática como um recurso de verificação da aprendizagem dos alunos e eficácia da sequência desenvolvida;

A figura 4 apresenta o esquema da etapa g com suas ações.

Figura 4- Ambiente de Investigação



h) Desenvolvimento de um experimento, na plataforma SIENA, com um grupo de alunos de uma turma do Ensino Médio, com a aplicação do ambiente de investigação desenvolvido na plataforma SIENA.

i) Análise dos dados coletados durante a aplicação do experimento com as filmagens realizadas, observações, produções dos alunos investigados e análise do banco de dados dos testes adaptativos realizados pelos alunos fornecidos pelo SIENA, para identificação do desenvolvimento de habilidades matemáticas e dificuldades acerca do conteúdo de Geometria Analítica por estes alunos e identificação da contribuição da proposta metodológica para o processo de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica no Ensino Médio.

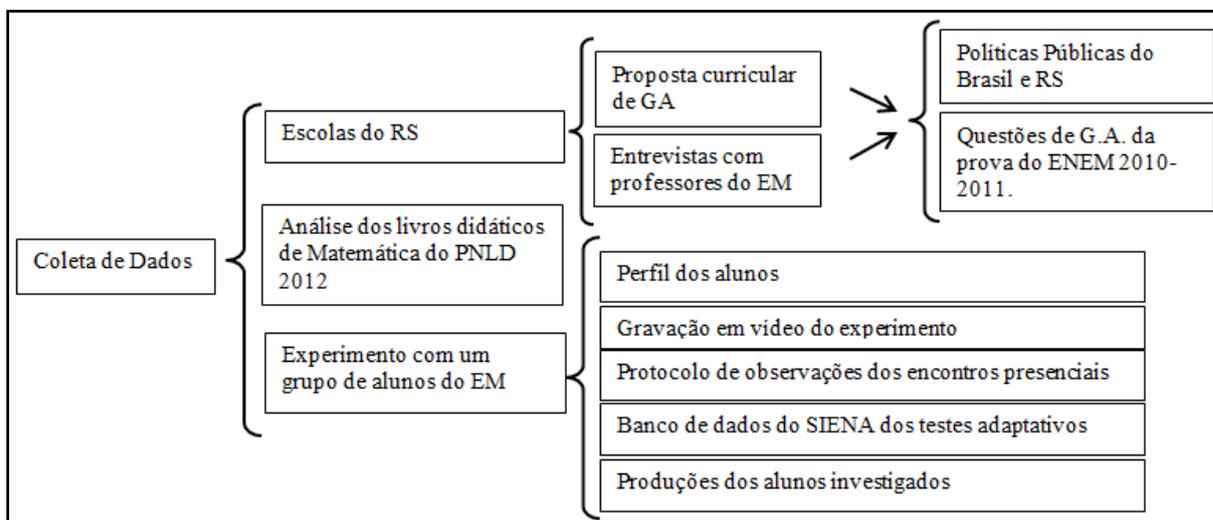
A coleta dos dados para subsidiar o desenvolvimento da proposta metodológica, articulada com a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e nas principais tendências metodológicas para a área de Educação Matemática, será através

de:

- análise das propostas curriculares para o Ensino Médio das escolas públicas do Rio Grande do Sul com as melhores médias em Matemática, conforme os resultados do Exame Nacional do Ensino Médio, do ano de 2010 (critério para seleção das escolas), no que se refere aos conteúdos de Geometria Analítica;
- entrevistas com os professores de Matemática do Ensino Médio das escolas selecionadas;
- análise da abordagem de questões de Geometria Analítica das provas do ENEM de 2010 e 2011;
- análise dos livros didáticos nacionais para o Ensino Médio, aprovados pelo Plano Nacional do Ensino Médio 2012 e pesquisa nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio no que tange os conteúdos de Geometria Analítica.

No desenvolvimento do experimento realizado com um grupo de alunos do Ensino Médio, com a proposta metodológica desenvolvida, os dados serão coletados através de filmagens realizadas durante o desenvolvimento do experimento, protocolo de observações dos encontros presenciais, as produções dos alunos investigados e análise do banco de dados dos testes adaptativos realizados pelos alunos fornecidos pelo SIENA. A figura 5 apresenta um esquema que ilustra a coleta de dados.

Figura 5- Coleta de dados



Com estes instrumentos e com a triangulação dos dados, esta entendida por Araújo e Borba (2004), como a utilização de diferentes procedimentos para obtenção dos dados, a fim de aumentar a credibilidade de uma pesquisa qualitativa, busca-se encadear e contextualizar os resultados obtidos para responder as seguintes questões:

- 1) O que apresentam as Políticas Públicas do Brasil e do Rio Grande do Sul para o ensino

da Geometria Analítica no Ensino Médio?

2) A Geometria Analítica é parte do currículo de Matemática desenvolvido nas escolas estaduais do Rio Grande do Sul?

3) Quais conteúdos de Geometria Analítica são ensinados no Ensino Médio e quais objetivos a serem alcançados com o estudo destes conteúdos?

4) Quais metodologias são utilizadas para o ensino da Geometria Analítica e em que momento do Ensino Médio é abordada?

5) O que, como e quando estes conteúdos estão sendo avaliados?

6) Os professores do Ensino Médio que lecionam Geometria Analítica articulam os Registros de Representação Semiótica e quais tendências metodológicas para o ensino da Matemática utilizam?

7) O que os livros didáticos do Ensino Médio, aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático do ano de 2012, abordam de Geometria Analítica, quais metodologias propõem para seu ensino, quais Registros de Representação Semiótica utilizam e como são explorados estes registros?

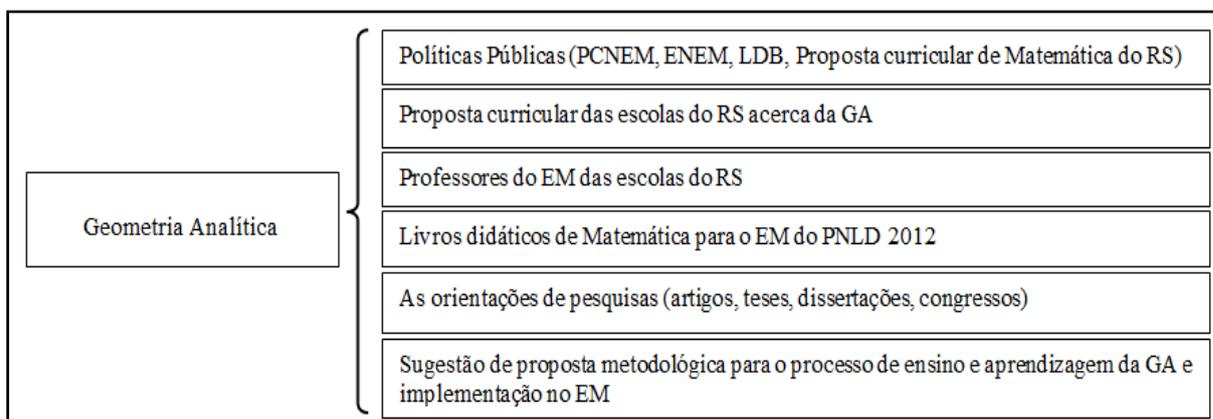
8) As Tecnologias da Informação e Comunicação auxiliam no processo de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica?

9) Quais habilidades matemáticas e dificuldades apresentam um grupo de alunos do Ensino Médio, que não estudaram Geometria Analítica, com a experiência de uma proposta metodológica articulada com a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem deste tema?

10) Quais abordagens didático-pedagógicas devem ser priorizadas no ensino e aprendizagem da Geometria Analítica?

A figura 6 ilustra o que será investigado para responder as questões supracitadas.

Figura 6- Investigação com Geometria Analítica



## Situando a pesquisa

Foram selecionadas escolas com médias, no ENEM/2010, acima de 555,00, totalizando 52 escolas estaduais do Rio Grande do Sul. Para essas escolas foram solicitadas a proposta curricular e enviado um questionário para os professores de Matemática responderem acerca de seu trabalho com o conteúdo de Geometria Analítica. Foi realizada a análise dos livros didáticos para o Ensino Médio aprovados pelo PNLD(2012). Está sendo realizada, também, a construção do referencial teórico para dar seguimento nas demais etapas mencionadas na metodologia.

## Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/ Seb, 2006.

DALLEMOLE, Joseide Justin. **Registros de Representação Semiótica: uma experiência com o ambiente virtual SIENA**. Canoas: ULBRA, 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de de Ciências e Matemática), Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2010.

DAMM, Regina Flemming. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara et al. **Educação Matemática: uma introdução**. 2.ed. São Paulo: EDUC, 2002. p. 135-153.

D'AMORE, Bruno. **Epistemologia e Didática da Matemática**. 1. ed. São Paulo: Escrituras Editora, 2005.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. Campinas, SP: Papirus, 2003. p.11-33.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y Pensamiento Humano: Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales**. Tradução em casteliano de Myriam Veja Reestrepo. Universidade Del Valle: Peter Lang, 2004.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

IEZZI, Gelson, et al. **Matemática: ciência e aplicações**. vol 3. São Paulo: Saraiva, 2010.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. Campinas, SP: Papirus, 2003.

SILVA, Carlos Roberto da. **Explorando Equações Cartesianas e Paramétricas em um Ambiente Informático**. São Paulo: PUC, 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.