

Uma proposta de ensino para o conceito de derivada

Mestrando Douglas Paes Mação¹

Prof^a Dr^a Vera Helena Giusti de Souza²

GD4 – Educação Matemática no Ensino Superior

RESUMO

Coloca-se como objetivo de pesquisa apresentar uma abordagem para o ensino de derivada de uma função de uma variável real, com a seguinte questão: “*Uma abordagem do conceito de derivada, por meio da Resolução de Problemas, com foco em diferentes pontos de vista, pode contribuir para a presença de características formais, simbólicas e corporificadas desse conceito?*”. Para responder tal questão, escolheu-se utilizar os princípios da Resolução de Problemas (POLYA, 1978), para elaborar um conjunto de atividades que foquem diferentes pontos de vista do conceito de derivada (THURSTON, 1994), com base nos princípios teóricos dos Três Mundos da Matemática (TALL, 2004). A Resolução de Problemas, porque se busca uma abordagem diferenciada. Diferentes pontos de vista de derivada, porque se acredita que a aprendizagem destes pode provocar, num sujeito, características formais, simbólicas e corporificadas do conceito, cuja coexistência, segundo Tall (2004), é necessária para garantir o desenvolvimento cognitivo. Cada uma das atividades será acompanhada de uma análise didática, a partir da qual se pretende elaborar também um conjunto de questões do tipo “tarefa de reconhecimento”, que poderá servir para diagnosticar se um sujeito tem os conhecimentos prévios necessários para desenvolver a respectiva atividade.

Palavras-chave: Derivada. Resolução de Problemas. Três Mundos da Matemática.

INTRODUÇÃO

No segundo semestre de 2010, lecionava Cálculo Diferencial e Integral II como Professor Assistente I em caráter emergencial na Faculdade de Tecnologia de Sorocaba (FATEC). Foi então, no final de 2010, que percebi que meu objetivo, dentro da Matemática, seria trabalhar como educador e que, como tal, tenho necessidade de investigar problemas e entraves que existem no processo de ensino e dificuldades que têm os alunos na aprendizagem de Matemática.

Como na ementa proposta para essa disciplina havia o tópico Funções de Duas Variáveis Reais a Valores Reais, foi lecionando derivadas parciais que comecei a perceber

¹Mestrando em Educação Matemática pela Universidade Bandeirante de São Paulo, autor. e-mail: douglas.macao@hotmail.com.

²Professora Doutora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo, orientadora. e-mail: verahgsouza@gmail.com

as dificuldades de alguns alunos em relação à Derivada de Funções de Uma Variável Real a Valores Reais, o que me motivou a buscar a compreensão do conceito de maneiras diferentes e os motivos pelos quais alguns alunos, que já cursaram o Cálculo Diferencial e Integral I, conseguiram entender o conceito e outros não, apenas dominavam as técnicas.

Em 2012, iniciei o Mestrado Acadêmico em Educação Matemática pela Universidade Bandeirante de São Paulo, com o propósito de trabalhar uma proposta de ensino para a derivada, com a Resolução de Problemas. Com este objetivo, formulei uma questão de pesquisa: *“Uma abordagem do conceito de derivada, por meio da Resolução de Problemas, com foco em diferentes pontos de vista, pode contribuir para a presença de características formais, simbólicas e corporificadas desse conceito?”*

JUSTIFICATIVA

Reis (2001) argumenta sobre a necessidade, apontada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), de realizarmos mais pesquisas, na área de Educação Matemática, com o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, em razão dos altos índices de reprovação dessa disciplina, que trazem como consequência a evasão. Reis também descreve uma opinião comum entre docentes dessa disciplina, que relatam uma formação inadequada de alunos e uma opinião discente, que faz transparecer problemas na prática pedagógica.

Ao questionar-se sobre esta prática pedagógica, Reis (2001) ressalta a necessidade de ministrarmos uma disciplina inserida no contexto do curso em que se encontra.

“Uma prática muito comum, entre os professores de Cálculo, é ministrar esta disciplina sempre da mesma forma (mesmos conteúdos, mesma metodologia, mesmos exemplos, mesmas aplicações), sem levar em consideração a natureza do curso. Não concordando com essa prática, entendemos que cada um desses cursos profissionalizantes exige do professor uma transposição didática própria, de modo que a produção de significados das idéias do Cálculo esteja em estreita relação com o contexto profissional do curso.” (REIS, 2001, p.24)

Dall’Anese (2006) reafirma as argumentações exploradas por Reis (2001) sobre grandes índices de reprovação nos cursos de graduação em Cálculo Diferencial e Integral chegando a 80% em 2000 nesta disciplina (MEC, 2000, apud DALL’ANESE, 2006, p.13), que é inclusa no primeiro ano de vários programas de Cursos Superiores, como Engenharias, Economia, Ciências da Computação, Matemática, Física, Geologia.

Tais índices, no nosso entender, indicam a necessidade de pesquisas sobre o ensino de Cálculo, na área de Educação Matemática; no entanto, conforme Nobre Barros (2011)

“Apesar da existência de um grande número de pesquisas sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo, observamos que a maioria corresponde à pesquisa sobre o Teorema Fundamental do Cálculo, uma pequena parte sobre a História do Cálculo.” (NOBRE BARROS, 2011, p. 22)

O que significa que existem poucos trabalhos que tenham como foco uma abordagem pedagógica diferenciada para tópicos básicos da disciplina, como é o caso da derivada, que escolhemos para realizar nossos estudos e desenvolver nossa Dissertação de Mestrado em Educação Matemática pela UNIBAN-SP. Consideramos que a derivada é um conceito básico no desenvolvimento cognitivo de um sujeito, pois dele dependem vários outros, como limites, primitivas, integrais de Riemann, derivadas parciais, gradientes, equações diferenciais e, com certeza, o Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo, que afirma que a integral definida de uma função de uma variável pode ser calculada a partir de uma primitiva (ou antiderivada).

Nobre Barros (2011) coloca em foco os pontos de vista de derivada apresentados por Thurston (1994) e analisa quais pontos de vista podem ser trabalhados no Ensino Médio. Aproveitando as ideias dessa pesquisadora, pretendemos explorar alguns dos pontos de vista propostos por Thurston (1994), para elaborar uma abordagem de ensino do conceito da derivada no Ensino Superior, na disciplina Cálculo Diferencial e Integral ou afim.

Para desenvolver esta abordagem, pretendemos basear-nos no processo de Resolução de Problemas, conforme o processo heurístico proposto por Polya (1998), que é constituído por quatro passos.

“**Primeiro**, temos de compreender o problema, temos que perceber claramente o que é necessário. **Segundo**, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a idéia da resolução, para estabelecermos um plano. **Terceiro**, executamos o nosso plano. **Quarto**, fazemos um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a.” (POLYA, 1978, p. 3-4)

Por meio deste processo heurístico, acreditamos ser possível tornar os sujeitos mais autônomos e capazes de enfrentar problemas diferenciados, tanto na vida escolar como na vida social ou profissional.

Encontramos reflexo dessas nossas ideias em Pozo (1994, p. 9), que afirma ser possível, por meio da Resolução de Problemas, que alunos adquiram habilidades estratégicas que permitam aprender, por si mesmos, novos conhecimentos, tornando-os pessoas capazes de enfrentar diversas situações, em contextos variados.

Desta forma, convencemo-nos que é importante desenvolver nossa pesquisa sobre o ensino de derivada de função de uma variável, com a proposta de atividades, baseadas na Resolução de Problemas (POLYA, 1998), cada uma com foco num dos pontos de vista de Thurston (1994), numa tentativa de provocar, nos sujeitos, características formais, simbólicas e corporificadas (TALL, 2004).

CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

Para propormos atividades para o ensino do conceito de derivada, pretendemos escolher alguns dos pontos de vista sugeridos por Thurston (1994, p. 5).

- (1) Infinitesimal: a razão da variação infinitesimal do valor da função para uma variação infinitesimal de variável.
- (2) Simbólica: a derivada de x^n é nx^{n-1} , a derivada de $\sin x$ é $\cos x$ a derivada de $f \circ g$ é $f' \circ g * g'$ etc.
- (3) Lógica: $f'(x) = d$ se e somente se para cada ε existe um δ tal que quando $0 < |\Delta x| < \delta$, $\left| \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - d \right| < \varepsilon$.
- (4) Geométrica: a derivada é o coeficiente angular da tangente ao gráfico da função, isto se o gráfico tem uma tangente.
- (5) Taxa: a velocidade instantânea de $f(t)$ quando t é o tempo.
- (6) Aproximação: A derivada de uma função é a melhor aproximação linear para a função próximo a um ponto.
- (7) Microscópica: A derivada de ma função é o limite que se obtém olhando-a com microscópios cada vez mais poderosos. (THURSTON, 1994, p. 5.)

Para a escolha dos pontos de vista, vamos analisar alguns livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral, em busca desses pontos destacados em alguma atividade para utilizarmos como problema para essa abordagem ou ainda elaborarmos problemas que abordem o ponto de vista desejado, ambos com a proposta de abordarmos o conceito da derivada por meio de Resolução de Problemas, em cada um dos pontos de vista descritos, ou pelo menos naqueles mais empregados no ensino de Cálculo Diferencial e Integral.

Com a utilização de diferentes pontos de vista, pretendemos provocar uma jornada pelos Três Mundos da Matemática (TALL, 2004) que, segundo este pesquisador, é

necessária para provocar o desenvolvimento cognitivo, em Matemática, de qualquer ser humano, desde o nascimento até a idade adulta. São eles: *o mundo conceitual-corporificado*, *o mundo proceitual-simbólico* e *o mundo formal-axiomático*. Muitos são os trabalhos que apresentam estas definições, mas escolhemos as nossas interpretações das apresentadas por Tall (2004), porque as consideramos as originais.

O mundo conceitual-corporificado é baseado nas próprias percepções do mundo e engloba o que pensamos sobre coisas que percebemos e sentimos, seja no mundo físico, seja no mundo mental.

O mundo proceitual-simbólico é aquele dos símbolos que usamos em Matemática e que surge do mundo corporificado por meio de uma ação, que nos permite passar dos processos para fazer Matemática a um conceito pensável, representado por um símbolo, que funciona como *processo* e como *conceito (proceito)*.

O mundo formal-axiomático é baseado em definições, axiomas, propriedades e demonstrações, com os quais é possível formalizar conceitos baseados em definições teóricas da matemática axiomática.

O esquema da figura 1, baseado em Lima e Tall (2010), apresenta uma visão dos Três Mundos da Matemática - que supostamente não são hierarquizados - e dá uma ideia de caminhos possíveis no desenvolvimento cognitivo de um sujeito, em Matemática.

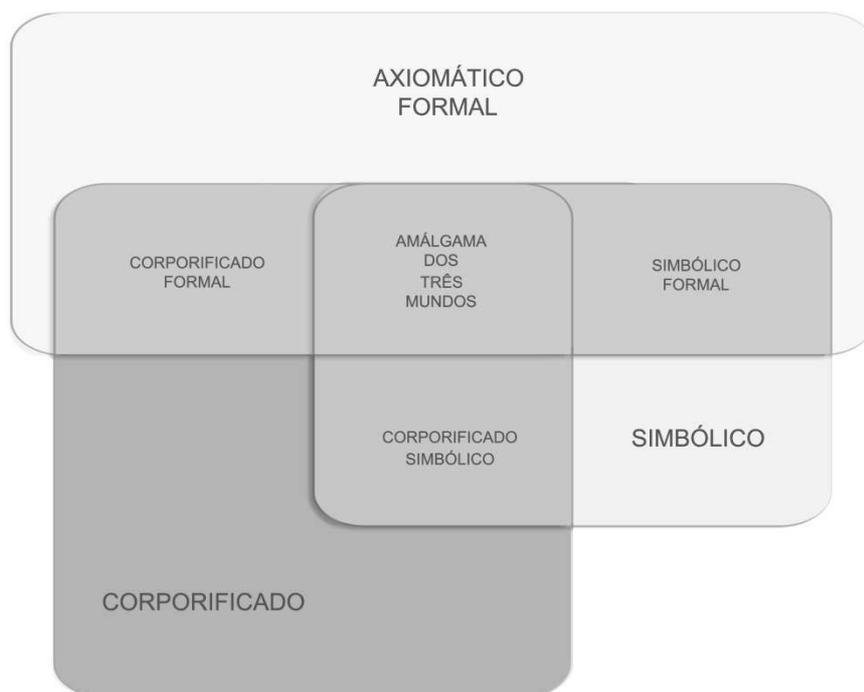


Figura 1 - Três Mundos da Matemática
Fonte: Lima e Tall (2010, tradução e adaptação nossa)

CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS

Vamos apresentar algumas considerações metodológicas sobre a nossa pesquisa, ligada à linha de pesquisa Ensino e Aprendizagem de Matemática e suas Inovações, do Programa de Mestrado em Educação Matemática da UNIBAN – SP.

Temos, como público alvo desta pesquisa, todo aquele que se interessa pelo ensino de derivada, por exemplos de aplicação da Resolução de Problemas (POLYA, 1998) e pelos Três Mundos da Matemática (TALL, 2004, 2010).

Uma abordagem para o ensino de derivada porque, como aponta Dall’Anese (2006), este carece de abordagens que façam menos alunos serem reprovados na disciplina Cálculo Diferencial e Integral, que é importante para Engenheiros, Físicos, Economistas e Matemáticos.

Os Três Mundos da Matemática, porque é uma teoria em desenvolvimento e acreditamos que os autores (TALL, 2004; LIMA, 2007) têm interesse na divulgação de abordagens de ensino que provoquem uma jornada pelos Três Mundos da Matemática (Mundo Conceitual-Corporificado, Mundo Proceitual-Simbólico e Mundo Formal-Axiomático), condição que consideram importante e necessária para o desenvolvimento cognitivo de um sujeito.

Optamos pela Resolução de Problemas como procedimento metodológico, porque a consideramos uma abordagem de ensino que pode incentivar os alunos a serem independentes, autônomos e criativos.

“Ensinar a resolver problemas não consiste somente em dotar os alunos de habilidades e estratégias eficazes, mas também em criar neles o hábito e atitude de enfrentar a aprendizagem como um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta”. (POZO, 1994, p. 14)

Ao propormos o ensino do conceito de derivada por meio de Resolução de Problemas, esperamos que passos implícitos do processo heurístico realizado para a resolução do problema proposto, se tornem explícitos, tornando possível a aprendizagem do ponto de vista considerado do conceito de derivada.

Assim, pretendemos explorar o processo heurístico da Resolução de Problemas numa abordagem de ensino do conceito de derivada, em diferentes pontos de vista, pois esperamos que, ao desenvolver os passos desse processo (POLYA, 1998), seja possível

que um sujeito realize uma jornada pelos Três Mundos da Matemática e se desenvolva cognitivamente, na direção da aprendizagem do conceito de derivada.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

- Analisar os pontos de vista de Thurston (1994), buscando exemplos e situações.
- Analisar alguns livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral, usados em grandes universidades, para descobrir quais pontos de vista aparecem e quais não aparecem.
- Escolher aqueles que podem colaborar para o ensino de derivada, de acordo com a fundamentação teórica escolhida.
- Elaborar atividades, para cada ponto de vista escolhido, de acordo com os princípios da Resolução de Problemas (POLYA, 1998).
- Fazer uma análise didática das atividades elaboradas, com objetivos, conhecimentos prévios necessários e algumas possíveis resoluções, para que leitores deste trabalho possam utilizar as atividades propostas, em sala de aula.
- A partir da análise didática de cada atividade, elaborar questões que possam compor uma “tarefa de reconhecimento” sobre os pré-requisitos necessários para atingir os objetivos da atividade e, assim, tentar garantir um bom aproveitamento da proposta.

REFERÊNCIAS

NOBRE BARROS, L. H. Os pontos de vista identificados por Thurston para a introdução da noção de derivada de uma função no Ensino Médio. 2011. 213f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Bandeirante de São Paulo. São Paulo, 2011.

DALL'ANESE, C. Conceito de Derivada: uma proposta para o ensino e aprendizagem. 140f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2000.

DALL'ANESE, C. Argumentos e Metáforas conceituais para taxa de variação. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2006.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência. 1978.

POZO, J. Ignácio. **A solução de problema: aprender a aprender, resolver para aprender**. Porto Alegre: Artmed. 1998.

REIS, F. da S. **A tensão entre o rigor e intuição no Ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Educação Matemática. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2001.

TALL, D. O. **Introducing three worlds of mathematics**. *For the Learning of Mathematics*. Canada, v. 23, n. 3, p. 29–33, 2004.

THURSTON, W. P. **On the Proof and Progress in Mathematics**, Bulletin of the American Mathematical Society, Volume 30, Number 2, April 1994, pp 161-177.