Equações Diofantinas Lineares: uma proposta para o ensino médio.

Bianca Herreira Capilheira[1], Luisa Rodriguez Doering[2]

GD3 – Educação Matemática no Ensino Médio

RESUMO: Apresentamos aqui parte do trabalho, cuja metodologia foi inspirada na Engenharia Didática, que discutiu e investigou a viabilidade de inserir o ensino/estudo das equações diofantinas lineares no ensino médio. Foi desenvolvida, aplicada e analisada uma sequência didática em uma turma do 1º semestre do ensino médio integrado de química do Instituto Federal Sul-Rio-Grandense, Campus Pelotas. Através das atividades executadas pelos alunos, das anotações feitas pela professora-mestranda e da filmagem de todas as aulas, foi possível coletar os dados sobre toda a experiência. Esta foi iniciada e baseada em um jogo nomeado "escova diofantina", derivado do jogo "escova", seguido de atividades estruturadas com exercícios, questionamentos e debates que encaminharam os alunos, de forma natural, para a construção e estudo do conteúdo desejado. Num apêndice da dissertação, apresentamos uma proposta de sequência didática renovada e pronta para ser aplicada por qualquer professor interessado em lecionar equações diofantinas no ensino médio. Os resultados das análises dos dados indicaram que os alunos do primeiro ano do ensino médio apresentam plenas condições matemáticas para a compreensão e construção dos conceitos e propriedades básicas relacionadas às equações diofantinas lineares.

Palavras – Chave: Ensino de matemática. Equações diofantinas lineares. Ensino médio. Engenharia Didática.

INTRODUÇÃO

O trabalho aqui apresentado discutiu e investigou a viabilidade de inserir o ensino/estudo das equações diofantinas lineares no ensino médio. Estas se caracterizam por equações do tipo $ax+by=c$, com a, b e c pertencente aos inteiros, com soluções, também, nos inteiros.

Vários problemas do cotidiano, de fácil compreensão, que são ao mesmo tempo interessantes e importantes, necessitam de soluções inteiras e podem ser abordados pela teoria das equações diofantinas. Embora não faça parte dos conteúdos abordados nos Ensinos Fundamental e Médio, nossa tese afirma que a teoria das equações diofantinas pode ser introduzida aos alunos do ensino Médio, capacitando-os com uma maneira

[1] Instituto Federal Sul-Rio-Grandense. Email: biancaherreira@pelotas.ifsul.edu.br
[2] Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Email: ldoering@mat.ufrgs.br

sistemática de resolução desses problemas, que é muito mais eficaz do que a estratégia de solução por tentativa e erro apresentada costumeiramente.

A resolução de equações diofantinas lineares utiliza basicamente conceitos já adquiridos por alunos do final do Ensino Fundamental, como o de divisor, máximo divisor comum, divisão euclidiana e equação da reta. Esses conteúdos foram revisitados com mais precisão (de um ponto de vista mais formal), reformulados, apresentando mais propriedades e mostrando outras alternativas de abordagem e cálculo, que nos levam a entender e determinar as soluções destas equações.

As questões abrangidas pelas equações diofantinas lineares são relevantes e foi prioridade mostrar aos alunos que podemos trocar o método de tentativa e erro por um método eficaz para resolver estas equações. Diante deste cenário, decidimos desenvolver uma pesquisa qualitativa com o apoio da Engenharia Didática, uma vez que esta oportuniza avaliar a produção dos alunos a partir do confronto de análises de produções dos alunos em questão e da proposta do professor.

A Engenharia Didática pode ser uma metodologia inspiradora uma vez que “caracteriza-se antes de mais por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em sala de aula” (ARTIGUE, 1996, p. 196). Sentimos que a proposta desta metodologia se aproximava do que buscávamos, porque nosso projeto era de uma prática didática até então desconhecida como proposta de inserção na sala de aula.

E, além disso, “A teoria da Engenharia Didática pode ser vista como referencial para o desenvolvimento de produtos para o ensino, gerados na junção do conhecimento prático com o conhecimento teórico.” (CARNEIRO, 2005, p. 87) Com este intuito, nos apêndices da dissertação, indicamos uma possibilidade para sala de aula, através das reorganização das atividades utilizadas na experimentação.

Escolhemos desenvolver o trabalho no primeiro ano do ensino médio, por entender que os alunos, nesse período, já possuem o amadurecimento matemático, bem como os pré-requisitos necessários para o desenvolvimento da nossa proposta e, também, porque é um dos níveis de ensino em que a professora-mestranda atua.

A experiência de ensino foi desenvolvida no 1º ano do Ensino Médio-integrado de Química do Instituto Federal Sul-Rio-Grandense Campus Pelotas, contando com 20 (vinte) períodos de 45 (quarenta e cinco) minutos cada.

TRABALHOS DESENVOLVIDOS SOBRE O TEMA

A investigação aqui apresentada teve início em pesquisas já realizadas e produzidas nos programas de mestrado e doutorado, bem como em um TCC e artigos relacionados com o tema Equações Diofantinas.

As produções advindas de um grupo de pesquisa da PUC(Pontifícia Universidade Católica de São Paulo), denominado GPEA (Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica), mostram que a implantação das equações diofantinas na escola parece possível e indica (POMMER, 2008, p.122) que apesar de, no ensino médio, os alunos já estarem apropriados dos pré-requisitos, os de anos mais adiantados apresentam mais facilidade para a compreensão da proposta de resolução de equações diofantinas, o que não exclui a sua utilização em outros níveis. Tais trabalhos instigaram ainda mais a nossa curiosidade de verificar a inclusão da teoria das equações diofantinas no ensino médio, uma vez que nos parece que esta investigação fecharia um ciclo iniciado pelo GPA.

Além das dissertações o TCC de Monteiro (2010) verifica a aplicabilidade das equações diofantinas lineares no ensino médio através de uma oficina realizada em cinco encontros numa escola de Porto Alegre, cujo ingresso se dá através de processo seletivo. O autor aponta “Sobre as equações diofantinas lineares propriamente falando, os resultados dos testes revelaram que a grande maioria dos alunos compreendeu o método utilizado para se encontrar todas as soluções inteiras dessa equação.” (MONTEIRO, 2010, p.51).

Além destes, A Revista do Professor de Matemática (RPM) traz 3 artigos na edição 8 que tratam da busca por soluções inteiras em diferentes situações. A seguir, na mesma edição da RPM, Sergio Noriaki Sato e Carlos Isnard buscam soluções inteiras de forma genérica em dois artigos distintos e respectivamente intitulados, “Soluções inteiras positivas” e “Soluções inteiras”. Embora estes trabalhos não tratem especificamente do estudo das equações diofantinas lineares, eles indicam a importância de determinar soluções inteiras e trazem exemplos interessantes. Por fim, Gilda La Rocque e João Bosco Pitombeira, na edição 19 da RPM, apresentam o artigo “Uma equação diofantina e suas soluções”.

ENUNCIADOS DOS CONTEÚDOS MATEMÁTICOS NECESSÁRIOS

Apresentamos a seguir um resumo do nosso estudo sobre a teoria matemática necessária para o entendimento das propriedades das equações diofantinas lineares, com os resultados mínimos para a compreensão do tema.

Algoritmo da Divisão de Euclides: Sejam $a, b \in N$ com $b \neq 0$. Então, existem e são únicos $q, r \in N$ tais que $a = qb + r$, com $r < b$. A divisão euclidiana também é válida em Z:

Teorema: Sejam $a, b \in Z$ com $b \neq 0$. Então, existem e são únicos q, $r \in Z$ tais que $a = qb + r$, com $0 \leq r < |b|$.

Note que a exigência de termos $0 \leq r < |b|$ é fundamental, pois, caso contrário, perderíamos a unicidade do resto.

Lema de Euclides: Sejam a, $b \in Z$ e $n \in N$. Então, MDC(a, $b+na$) = = MDC(a, $b-na$) = MDC(a, b).

Algoritmo para calcular o MDC: Sejam a, $b \in N$ não simultaneamente nulos. Suponhamos, que $a \leq b$. Pelo Algoritmo da Divisão existem e são únicos q_1, $r_1 \in N$ tais que $b = a \cdot q_1 + r_1$ com $r_1 < a$.

Pelo Lema de Euclides, MDC(a, b)=MDC(a, $b-aq_1$) =MDC(a, r_1).

Se $r_1=0$, já temos o máximo divisor comum, pois MDC(a, b) =MDC(a, 0) = a.

Se $r_1 \neq 0$, continuamos o processo de divisão, dividindo a por r_1. Pelo Algoritmo da Divisão, existem e são únicos q_2, $r_2 \in N$ tais que $a= r_1 \cdot q_2 + r_2$ com $r_2 < r_1$. Assim, pelo Lema de Euclides MDC(a, b)=MDC(a, r_1)=MDC(r_1, a)= MDC(r_1, $a- r_1 \cdot q_2$)= MDC(r_1, r_2).

Se $r_2=0$, já temos o máximo divisor comum, pois MDC(a, b)= MDC(r_1, r_2)= =MDC(r_1, 0)= r_1.

Se $r_2 \neq 0$, continuamos o processo de divisão, dividindo r_1 por r_2. Vamos obter um quociente q_3 e um resto $r_3 < r_2$.

Esse processo é finito, pois existe $n \in Z$ tal que $r_{n+1}=0$. De fato, como $a>r_1>r_2>r_3...$, e todos esses restos são positivos, se este processo não parasse em algum momento, obteríamos uma sequência de números naturais infinita e decrescente, o que é impossível pelo princípio da boa ordenação. Então, MDC(a, b)= MDC(r_n, r_{n+1})= MDC(r_n, 0)= r_n.

Portanto, MDC(a, b) é igual ao último resto antes de obtermos resto 0, ou seja, o primeiro resto que é obtido e tem a propriedade de que divide o resto anterior.

Teorema de Bezout: Dados a, $b \in Z$, sempre podemos escrever o MDC(a, b) como uma combinação linear de a e b, ou seja, existem $x, y \in Z$, tais que MDC(a, b) = $ax + by$.

Definição de Equação Diofantina Linear: Sejam a, b, $c \in Z$ com a e b não ambos nulos, a equação $ax + by = c$ é chamada equação diofantina linear, nas x e y variáveis.

Existência de solução de uma Equação Diofantina Linear: Sejam a, b, $c \in$ Z com a e b não ambos nulos e seja D = MDC(a, b). Então, a equação $ax + by = c$ tem solução em Z se e somente se D | c.

Solução de uma Equação Diofantina Linear: Sejam a, b, $c \in$ Z, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$ e tais que MDC(a, b) = 1. Escrevendo $a\alpha + b\beta = 1$, com α, $\beta \in$ Z, temos que $x_0 = \alpha$ c, $y_0 = \beta$ c é uma solução da equação $ax + by = c$. As demais soluções inteiras são dadas por $x = x_0 + bt, \quad y = y_0 - at$ com $t \in$ Z.

No caso de MDC(a, b) $\neq 1$, divide-se a equação dada pelo MDC(a, b) para recairmos no caso recém-apresentado.

Na Geometria Analítica, a equação $ax + by = c$ representa uma reta r. Ao procurarmos soluções em Z da equação $ax + by = c$, na verdade, estamos perguntando se a reta r, por ela representada, contém pontos que tenham ambas as coordenadas inteiras. Ainda, existem equações do tipo $ax + by = c$, sem soluções inteiras, que, geometricamente, evitam todos os pontos do reticulado Z × Z = $\{(x, y) \mid x, y \in \mathrm{Z}\}$.

EXPERIÊNCIA DE ENSINO E ALGUNS COMENTÁRIOS

Expomos agora a maneira reduzida de como conduzimos toda a sequência didática. Buscamos fazer com que os alunos tivessem a oportunidade de obter resultados, a partir de uma atividade realizada. Procuramos não impor conceitos, mas trabalhamos de modo que os alunos ficassem convencidos de fatos para chegarem as suas próprias conclusões.

O jogo “Escova Diofantina”

Começamos as atividades enfatizando que o foco é estudar alguns tipos de equações. Para isso, motivamos este início através do jogo “escova diofantina”, dizendo que o jogo é parecido com o jogo “escova”, mas com algumas particularidades nas regras, que foram entregues para os alunos. Para que eles entendessem bem como jogar, lemos as regras no grande grupo e fizemos uma rápida simulação do jogo para explicar as dúvidas que foram aparecendo para todos os alunos.

Destacamos a importância do preenchimento da folha das atividades entregue para cada um deles, com as jogadas que fossem aparecendo.

Após a aplicação do jogo “escova diofantina”, os alunos apresentaram os registros das possibilidades de jogadas, e a partir disto construímos a definição de combinação linear, partindo das escritas das jogadas apresentadas e registradas na folha de registro das jogadas

Por exemplo: Se tivermos 2 cartas de número 6 e 3 cartas de número 1, obtemos $6 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 15$, mas também se tivermos 2 cartas de número 7 e 1 cartas de número 1, obtemos $1 \cdot 1 + 7 \cdot 2 = 15$. Assim, conseguimos escrever o número 15 utilizando diferentes números, através das operações de soma e multiplicação entre eles. Neste caso, dizemos que 15 é uma combinação linear de 1 e 7. Com esta ideia, partimos para a definição formal.

A proposta de iniciar a experiência didática por um jogo que nomeamos “escova diofantina” mostrou-se positiva, pois, além de convidar os alunos à proposta de uma forma lúdica, conduziu-os para a compreensão de combinação linear, e mais tarde auxiliará na construção de equações e suas possíveis soluções. Isso mostrou que um jogo pode ser uma ferramenta bastante apropriada para a sala de aula, quando bem estruturado e com o professor tendo a clareza da matemática que deseja fazer dele emergir.

Na aplicação do jogo, por exemplo, os alunos preencheram uma tabela com as jogadas e, a partir delas e das discussões que apareceram quando eles relatavam suas jogadas, definimos combinação linear e construímos a equação que modelava o jogo, introduzindo, deste modo, nosso tema: equação diofantina linear.

Equação Diofantina na sequência didática

Montamos a tabela a seguir com as equações das possibilidades de jogadas e pedimos que eles pintassem as células que resultaram em soma 15, ou seja, para que eles fossem aos poucos distinguindo as equações que têm solução nos inteiros.

1x+2y=15	1x+3y=15	1x+4y=15	1x+5y=15	1x+6y=15	1x+7y=15	1x+8y=15	1x+9y=15	1x+10y=15
2x+1y=15	2x+3y=15	2x+4y=15	2x+5y=15	2x+6y=15	2x+7y=15	2x+8y=15	2x+9y=15	2x+10y=15
3x+1y=15	3x+2y=15	3x+4y=15	3x+5y=15	3x+6y=15	3x+7y=15	3x+8y=15	3x+9y=15	3x+10y=15
4x+1y=15	4x+2y=15	4x+3y=15	4x+5y=15	4x+6y=15	4x+7y=15	4x+8y=15	4x+9y=15	4x+10y=15
5x+1y=15	5x+2y=15	5x+3y=15	5x+4y=15	5x+6y=15	5x+7y=15	5x+8y=15	5x+9y=15	5x+10y=15
6x+1y=15	6x+2y=15	6x+3y=15	6x+4y=15	6x+5y=15	6x+7y=15	6x+8y=15	6x+9y=15	6x+10y=15
7x+1y=15	7x+2y=15	7x+3y=15	7x+4y=15	7x+5y=15	7x+6y=15	7x+8y=15	7x+9y=15	7x+10y=15
8x+1y=15	8x+2y=15	8x+3y=15	8x+4y=15	8x+5y=15	8x+6y=15	8x+7y=15	8x+9y=15	8x+10y=15
9x+1y=15	9x+2y=15	9x+3y=15	9x+4y=15	9x+5y=15	9x+6y=15	9x+7y=15	9x+8y=15	9x+10y=15
10x+1y=15	10x+2y=15	10x+3y=15	10x+4y=15	10x+5y=15	10x+6y=15	10x+7y=15	10x+8y=15	10x+9y=15

	Situação já considerada
	Há solução
	Não há solução

Tabela das equações do jogo.

Assim, obtivemos a equação que modela o jogo ax+by=15, onde x é quantidade de cartas de número "a" e y é quantidade de cartas de número "b".

Definimos equação diofantina linear, através da generalização da escrita das equações que modelam o jogo "Escova Diofantina", como mostramos acima, da equação que modelou uma situação hipotética em que era possível utilizar um infinito número de baralhos para o jogo e de um exercício em que a soma era 12. Lembramos as equações obtidas em cada situação, para chegar à equação ax+by=c. E, então, na definição de equação diofantina linear. Utilizamos a seguinte escrita para a situação relatada:

Em ambos os casos de soma 15: ax+by=15

Na tabela de soma 12: ax+by=12

Consideremos um c $\in \mathbb{Z}$: ax+by =c

Interpretação geométrica da equação na sequência didática

Exemplificamos a representação de uma equação linear no plano cartesiano, para dar às equações encontradas nas tabelas de soma 15 e 12 uma visualização geométrica. Isso também foi usado, mais tarde, para as conclusões sobre a existência da solução de uma equação diofantina linear e a solução geral. Evidenciamos que buscar a solução equivale a procurar pares ordenados de ambas coordenadas inteiras que sejam pontos da reta.

Consideramos em aula, por exemplo, a equação do jogo x+3y=15 e sua representação no plano cartesiano a seguir.

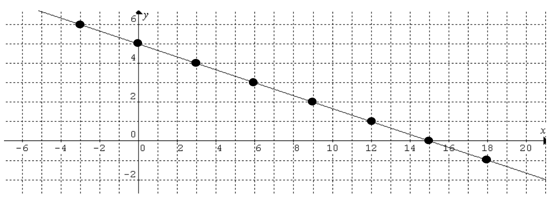

Gráfico referente à equação x+3y=15, com os respectivos pontos de ambas coordenadas inteiras.

Passamos a examinar se os alunos sabiam representar geometricamente a equação $ax+by=c$ e eles demonstraram, através dos exercícios e das discussões, ter muitas dúvidas. Porém, no decorrer das aulas, eles mostraram ter superado esta dificuldade, até mesmo porque utilizaram, com facilidade, a representação geométrica para concluir, posteriormente, o teorema sobre a solução geral de uma equação diofantina linear, feito posteriormente.

Divisor, Divisor Comum e MDC na sequência didática

Precisávamos, também, que os alunos lembrassem os conceitos de divisor, divisor comum e de MDC para concluírem o teorema que trata de quando uma equação diofantina linear tem solução inteira. Examinamos isso através das atividades propostas e dos questionamentos e eles mostraram não ter dificuldades, embora não tenham indicado com clareza os conceitos.

Os alunos já tinham analisado as equações que têm solução inteira através do jogo e da representação geométrica. Retomamos a tabela do jogo para eles indicarem o MDC entre os coeficientes das equações e, assim, além de atrelar os assuntos já conhecidos por eles à proposta da sequência didática, começamos a induzi-los a pensar na relação entre o MDC, o resultado da equação e quando uma equação tem solução inteira. Os poucos alunos que não indicaram a ideia do teorema através da atividade, mostraram ficar convencidos com as discussões, o que promoveu a enunciação do teorema. Para as atividades seguintes, os alunos utilizaram este resultado com muita naturalidade, garantindo, assim, a compreensão do teorema.

Divisão euclidiana na sequência didática

Introduzimos uma nova maneira para o cálculo do MDC, diferente da conhecida pelos alunos. Procuramos mostrar para eles que esta é uma maneira sistemática de obter o resultado sem decorrer a decomposição em fatores em primos. Resolvemos vários exemplos, até que os alunos compreendessem o procedimento.

Trabalhamos em aula com o exemplo a seguir, para convencê-los:

Sabemos que MDC(10, 6) = 2, MDC (6, 4) = 2, MDC (4, 2) = 2 e, também que na divisão de 10 por 6, obtemos resto 4, ou seja, $10=1\cdot 6+4$. E na divisão de 6 por 4, obtemos resto 2, ou seja, $6=4\cdot 1+2$.

Neste caso, o MDC(10, 6) é igual ao MDC entre 6 e 4 que é o resto da divisão de 10 por 6. E o MDC(6, 4) é igual ao MDC entre 4 e 2 que é o resto da divisão de 6 por 4. Isso vale em geral e este procedimento é conhecido como Algoritmo de Euclides para o cálculo do MDC. Este método garante que podemos trocar o MDC entre dois números *a* e *b* pelo MDC entre o menor deles e o resto da divisão do maior pelo menor.

Depois de convencidos, resolvemos os exemplos, utilizando esta ideia, da seguinte maneira: Calcular o MDC(120, 23).

$120=5\cdot 23+5$, então MDC(120, 23) = MDC(23, 5)

$23=4\cdot 5+3$, então MDC(23, 5)= MDC(5,3)

$5=1\cdot 3+2$, então MDC(5,3)=MDC(3, 2)

$3=1\cdot 2+1$, então MDC(3, 2) =MDC(2,1)

$2=2\cdot 1+0$, então MDC(2,1)=MDC(1,0) =1

Assim, MDC(120, 23)=MDC(23,5)=MDC(5,3)= MDC(3,2)=MDC(2,1)= MDC(1,0)=1

Queríamos que os alunos entendessem que a forma como calculavam o MDC nem sempre era efetiva. Para eles perceberem isso, a atividade que solicitava este cálculo buscou questionar o que acontecia, no que se refere à dificuldade de obter o MDC entre números grandes e, sem maiores problemas, eles desejaram uma nova maneira. Destacamos, assim, que o estudo sobre equações diofantinas lineares oportunizou, também, uma renovação e o amadurecimento de diversos conteúdos já vistos pelos alunos, principalmente acerca do MDC. Isso aconteceu através deste confronto entre a maneira como calculavam e a nova técnica apresentada, que foi bem aceita e compreendida pelos alunos.

Teorema de Bezout na sequência didática

De posse da nova maneira para calcular o MDC, passamos a utilizá-la para construir algumas equações diofantinas lineares e obter uma solução da equação construída, o que permitiu que retomássemos o anseio de obter as soluções de uma equação. Aproveitando os cálculos do MDC, passamos a escrevê-lo como combinação linear dos números envolvidos.

Lembramos que cada escrita feita para calcular o MDC é uma combinação linear. Assim, escrevemos o MDC como combinação linear dos números envolvidos. Associamos a escrita do MDC como combinação linear a uma equação diofantina linear e indicamos uma solução. Quando apareceu esta associação, em uma equação obtida no jogo, comparamos a solução encontrada anteriormente com a de agora para começarmos a pensar sobre as outras soluções de uma equação.

Resolvemos exemplos, como o apresentado a seguir, para os alunos entenderem o procedimento: Escrever o MDC entre 120 e 23 como combinação linear deles.

Lembramos que no exemplo da utilização do algoritmo de Euclides, calculamos o MDC(120, 23)=1, usando as seguintes igualdades: $120=5\cdot 23+5$, $23=4\cdot 5+3$, $5=1\cdot 3+2$, $3=1\cdot 2+1$.

Agora isolaremos os restos destas igualdades: $5=120-5\cdot 23$, $3=23-4\cdot 5$, $2=5-1\cdot 3$, $1=3-1\cdot 2$, para substituirmos na última igualdade, cujo resto é o MDC.

Em $1=3-1\cdot 2$ substituímos a igualdade $2=5-1\cdot 3$ e temos $1=3-1\cdot(5-1\cdot 3)=3\cdot 2-1\cdot 5$.

Em $1=3\cdot 2-1\cdot 5$ substituímos $3=23-4\cdot 5$ e temos $1=(23-4\cdot 5)\cdot 2-1\cdot 5 =23\cdot 2-9\cdot 5$.

Em $1=23\cdot 2-9\cdot 5$ substituímos $5=120-5\cdot 23$ e temos $1=23\cdot 2-9\cdot(120-5\cdot 23) = 23\cdot 47+120\cdot(-9)$.

Assim, escrevemos 1=MDC(120, 23) como combinação linear de 23 e 120.

Desta combinação linear, podemos gerar a equação diofantina $1=23x+120y$ e, assim, já temos uma solução, que é $x=47$ e $y=-9$.

Os alunos acompanharam muito bem os diversos cálculos que a escrita do MDC como combinação linear exige. Escolhemos cuidadosamente os exemplos e exercícios nas aulas em que eram executados muitos cálculos para que os alunos pudessem compreender o procedimento sem se intimidarem com o seu tamanho. Quando tiveram dúvidas, procuraram o atendimento extraclasse, bem como dirimir as dúvidas em aula e, aparentemente, tudo ficou sanado.

Solução de uma equação na sequência didática

Retomamos a representação geométrica da equação para obter a solução particular. Destacamos a maneira como dirigimos os alunos a escrever a solução geral da equação; para fugir do artifício algébrico, buscamos uma associação geométrica e, através da representação de algumas soluções da equação no plano cartesiano, naturalmente, foi detectado o comportamento das abscissas e ordenadas da solução geral de uma equação diofantina linear específica.

Utilizamos a visualização geométrica como aliada para a construção do teorema após os exemplos. Observamos os pontos de ambas as coordenadas inteiras e generalizamos as soluções. Depois, quando os alunos estavam convictos desta situação, procuramos as soluções de forma algébrica.

Consideramos em aula a equação $x+3y=15$ e sua representação no plano cartesiano, conforme gráfico apresentado anteriormente.

Verificamos que a equação possui solução em Z: MDC(1,3)=1 , 1 divide 15, então a equação possui solução em Z.

Escrevemos o MDC(1, 3) como combinação linear de 1 e 3: $1=3+1\cdot(-2)$.

Multiplicamos a combinação linear por 15:

$1 \cdot 15=3 \cdot 15+1 \cdot (-2) \cdot 15$ e, assim, $15=3 \cdot 15+1 \cdot (-30)$

Associamos a equação dada e indicamos uma solução: $x_0= -30$, $y_0=15$

Escrevemos a solução geral:

1°) Solução geral a partir da solução particular e da análise geométrica

Consideramos os pares ordenados com ambas as coordenadas inteiras e questionamos os alunos sobre o que está acontecendo com x e y. Observamos que, nesse exemplo, os valores de x aumentam em 3 unidades e os de y diminuem em 1 unidade, ou seja, $x=-30+3t$, $y=15-t$ com $t \in \mathbb{Z}$.

2°) Solução geral a partir da solução particular e da escrita algébrica

$15=3 \cdot 15+1 \cdot (-30)$

$15=3 \cdot 15 -3 \cdot 1 \cdot t+3 \cdot 1 \cdot t +1 \cdot (-30)$

$15=3(15-t)+1(-30+3t)$

$$\begin{cases} x=-30+3t \\ y=15-t \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Generalizamos os exemplos resolvidos e obtivemos que a solução geral da equação $ax+by=c$, a partir da solução particular (x_0, y_0), pode ser expressa por: $x=x_0+bt$ e $y=y_0-at$, com $t \in \mathbb{Z}$. De fato, da mesma maneira que nos exemplos, partindo de (x_0, y_0) como solução inicial, sempre que substituirmos na equação original, teremos: $c=ax_0+by_0=ax_0+abt-bat+by_0=a(x_0+bt)+b(y_0-at)$.

Resolução de uma equação do jogo

Consideramos em aula uma das equações do jogo: x+4y=15 e realizamos os mesmos passos para verificar a existência e encontrar sua solução. Encontramos $x=-45+4t$, $y=15-t$ com $t \in \mathbb{Z}$. Como *x* e *y* representam quantidade de cartas fizemos $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Assim, $x=-45+4t \geq 0$, logo $t \geq 11{,}25$ e $y=15-t \geq 0$, logo $t \leq 15$. Portanto, $11{,}25 \leq t \leq 15$. E, assim, temos $t \in \{12, 13, 14, 15\}$.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta experiência, cujo foco foi analisar a viabilidade da inserção do estudo de equações diofantinas lineares em uma turma regular do ensino médio, nos mostrou que uma aula bem preparada, além de economizar tempo em sala de aula, faz com que o seu objetivo fique mais claro para o aluno, tornando a aula mais inteligente e motivadora para ambos. As análises das atividades realizadas em sala de aula mostraram que os alunos do primeiro ano do ensino médio apresentam plenas condições matemáticas para a compreensão e construção dos conceitos e propriedades básicas relacionadas às equações diofantinas lineares.

Nossa proposta foi de construir conceitos com os alunos. Para isso, utilizamos as situações criadas e as inusitadas, que apareciam em aula como um processo investigativo. Isto se deu através de exemplos predefinidos no plano de ensino e pelos que surgiam em aula, bem como nas discussões que nasciam deste processo. Isso foi possível porque nos dispusemos a respeitar o tempo necessário para compreensão dos alunos, entendendo que este caminho, embora demorado, é o mais adequado para o aprendizado.

Nosso objetivo principal, quando pensamos nas aulas e no que seria interessante de os alunos apreenderem, foi de fazer com que eles fossem bem orientados para resolver uma equação diofantina linear. Porém, a experiência mostrou que revisitar conteúdos, aproveitando o que os alunos já dominam e, a partir daí, construir novos conceitos pode ser uma maneira motivadora de captar os alunos para as aulas, valorizando-os e, também, favorece a prática docente, que passa a ser mais desafiadora.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. **Engenharia Didática**. In: BRUN, Jean. Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996, p.193-217.

CARNEIRO, Vera Clotilde GARCIA. **Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática**. Zetetike, Campinas-UNICAMP, v. 13, n. 23, 2005, p. 85-118.

MONTEIRO, Guilherme Ferreira Monteiro. **Equações Diofantinas Lineares no Ensino Médio.** 2010. 91p. Trabalho de Conclusão de Curso. (Licenciatura em Matemática), UFRGS-RS, 2010.

POMMER, Wagner Marcelo. **Equações Diofantinas Lineares: um desafio motivador para alunos de ensino médio.** 2008. 153p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC-SP, 2008.