

# Visualização em Geometria

Camila Molina Palles<sup>1</sup>

Maria José Ferreira da Silva<sup>2</sup>

**GD6** – Educação Matemática, Tecnologias Informáticas e Educação à Distância

## Resumo

Este artigo apresenta um projeto de pesquisa, que está sendo desenvolvido e tem por objetivo o estudo da visualização em ambientes de Geometria Dinâmica visando compreender a constituição de tal processo à luz da Teoria dos Registros de Representação de Raymond Duval e do conceito de registro figural dinâmico.

Palavras-chave: Educação Matemática. Geometria. Geometria Dinâmica. Visualização.

## Introdução

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (1998) destacam a importância da área de Geometria nos níveis fundamental e médio tendo em vista que, por meio de seu ensino, o aluno desenvolve competências e habilidades de visualização, argumentação lógica e compreensão de formas geométricas. Além de relações e propriedades que são imprescindíveis para a percepção, interpretação e compreensão do espaço físico.

Segundo Leivas (2009) foi a partir do final da década de 90 que o tema visualização voltou-se ao pensamento geométrico, incluindo-se aí o interesse da teoria semiótica na visualização. Desde então a visualização tem sido um tema recorrente de pesquisas em diversas áreas. Em Educação Matemática têm indicado algumas tendências, principalmente, a respeito influência da tecnologia no pensamento visual e dos aspectos semióticos e representacionais na visualização matemática. Esta pesquisa vai ao encontro dessas tendências.

Este artigo apresenta um projeto de pesquisa que está sendo desenvolvido tendo por objetivo o estudo da visualização em ambientes de Geometria dinâmica. A fundamentação teórica baseia-se na Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval, autor que

---

<sup>1</sup> Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP - camilapalles@uol.com.br

<sup>2</sup> Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP – zeze@pucsp.br

considera a visualização baseada na produção de uma representação semiótica, questão que, particularmente nos interessa discutir. Essa pesquisa está inserida no projeto Processo de Ensino e Aprendizagem de Geometria em Ambientes Computacionais, PEA-TIC, que trata da contribuição de tecnologias na construção de conhecimentos de Geometria.

### **Justificativa**

De acordo com Guimarães, Vasconcelos e Teixeira (2006) a geometria é um campo rico da Matemática com importância fundamental para o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, para as noções de espaço e para a percepção visual. Fatores estes importantes em várias áreas do saber, não se restringindo apenas a Matemática.

Um dos principais problemas encontrados no ensino de geometria é a dificuldade de visualização de objetos geométricos, sejam eles planos ou espaciais, sendo importantes na construção e exploração de conceitos matemáticos, pois enquanto:

observação das formas geométricas constitui-se em espaço que exige a descrição e a comparação das formas geométricas, resgatando as suas semelhanças e diferenças possibilitando, dessa forma, a construção da imagem mental, o que possibilitará ao aluno pensar no objeto geométrico, na sua ausência, distinguindo as suas características conceituais e figurais. (GARCIA, 2006, p. 01)

Buscando trabalhos em Geometria relacionados à visualização para a revisão bibliográfica encontramos dissertações e teses nas mais variadas áreas, como mostra a Tabela 1.

**Tabela 1 - Trabalhos por área**

<b>Área</b>	<b>Quantidade de trabalhos</b>
Educação	03
Informática	01
Ensino de Matemática	02
Desenho, Cultura e Interatividade	01
Educação Científica e Tecnológica	01
Educação Matemática	01

Fonte: *Próprio autor.*

Com a leitura dos trabalhos citados na Tabela 1 percebemos uma preocupação com o desenvolvimento de habilidades visuais como fator importante para o ensino de geometria em várias áreas do conhecimento, não sendo apenas uma preocupação específica da Educação Matemática.

Entretanto, a maioria dos trabalhos foca o **desenvolvimento** da visualização, notando-se que não há uma preocupação em **compreender** o processo de visualização associado à geometria dinâmica.

Segundo Almeida e Santos (2007, p.9) é possível propiciar, por meio da geometria dinâmica, uma melhor identificação dos invariantes (propriedades e relações) pela transformação da figura geométrica em tempo real, ou seja, o registro figural passa de estático a dinâmico, permitindo alterações que possibilitam ao aluno explorar a figura sob outros aspectos, percebendo propriedades, conjecturando sobre resultados, validando hipóteses levantadas.

### **Questão de Pesquisa e Metodologia**

Com base no registro figural dinâmico e na ideia defendida por Duval (2002), de que a visualização é baseada na produção de uma representação semiótica, pretende-se estudar o processo de visualização em ambientes de Geometria dinâmica visando responder a seguinte questão de pesquisa: Como se constitui o processo de visualização de figuras dinâmicas?

Temos por hipótese que a imagem mental de um conceito geométrico não mantém as mesmas relações que a sua representação por meio do registro figural estático devido à criação de modelo protótipos, mas por meio do registro figural dinâmico, que permite a exploração da figura sob outros aspectos, a imagem mental formada pode corresponder à representação do conceito.

Na geometria dinâmica, as atividades que estimulam a exploração e a descoberta dos invariantes são realizadas através de experiências visuais e, por este motivo, possibilitam a formação de noções e conceitos geométricos que levam a uma representação mental correta por parte do estudante, auxiliando no processo de visualização. (ALVES, 2004, p. 72)

Para essa pesquisa optamos por um estudo bibliográfico, constituído basicamente de dissertações, teses, livros e artigos científicos. De acordo com Gil (2010, p. 44), embora a pesquisa bibliográfica seja considerada o primeiro passo de toda pesquisa científica, “há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas”.

## Fundamentação Teórica

Para Machado (2003) a maneira matemática de raciocinar e de visualizar está intrinsecamente ligada à utilização de representações semióticas, e toda comunicação em matemática se estabelece com base nessas representações.

Segundo Duval (1999) um registro de representação é um sistema semiótico que tem as funções cognitivas fundamentais no funcionamento cognitivo consciente e são classificados em quatro tipos diferentes, conforme Quadro 1.

**Quadro 1 - Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático**

	<b>Representação Discursiva</b>	<b>Representação Não Discursiva</b>
<b>Registros Multifuncionais:</b> os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua Natural  Associações verbais (conceituais).  Forma racional: argumentação a partir de observações, de crenças...; dedução válida a partir de definições ou uso de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectiva.  Apreensão operatória e não somente perspectiva;
<b>Registros Monofuncionais:</b> os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: numéricas (binárias, decimal, fracionária...); algébricas; simbólicas (línguas formais).  Cálculo	Gráficos cartesianos.  Mudanças de sistema de coordenadas;  Interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval, 2003, p. 14

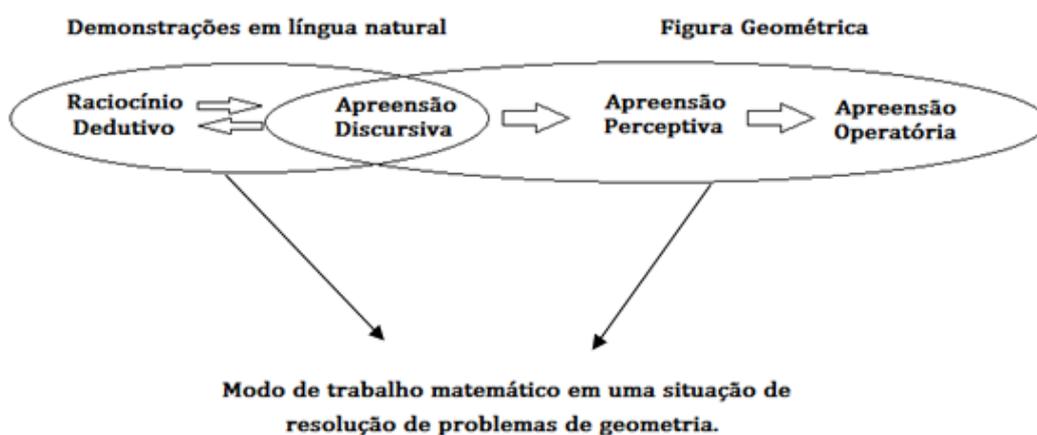
Duval (2004) distingue dois tipos de transformações de registros semióticos: os tratamentos e as conversões. Sendo entendido como tratamento “uma transformação da representação interna a um registro de representação ou a um sistema” (DUVAL, 2004, p. 44) e como conversão “a transformação da representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada em um registro, em uma representação deste mesmo objeto, desta mesma situação ou da mesma informação em outro registro.” (IBID, p. 46)

O autor ainda afirma que a geometria envolve três formas de processos cognitivos: a visualização, a construção de configurações e o raciocínio. Sendo que a visualização serve para a exploração heurística de uma situação. Entretanto,

para a maioria dos alunos, elas não têm cumprido este papel. Normalmente, trabalha-se com as figuras numa abordagem exclusivamente psicológica da percepção, aquela imediata, a qual não dá condições ao aluno para olhar a figura sob outros aspectos. Quer dizer, olhá-la de outros modos, sob outras configurações, o que implica na correspondência entre a visão de uma sequência de sub-figuras pertinentes, a união destas sub-figuras formando um todo, e ainda, a correspondência da figura e o texto, possibilitando, enfim, a exploração heurística. (FLORES e MORETTI, 2004, p. 1).

Duval (1995 apud SALAZAR, 2009) salienta que é necessário um pouco de coordenação entre apreensão operatória, apreensão discursiva e raciocínio dedutivo, pois a atividade geométrica requer mudanças contínuas entre visualização e discurso, conforme mostra a Figura 1.

**Figura 1 - Habilidades e coordenações a serem desenvolvidas na Educação Matemática**



Fonte: Duval, 2002, p. 14, tradução nossa.

Duval (1995 apud SALAZAR, 2009, p. 82-84) distingue quatro tipos de apreensões no registro figural: sequencial, perceptiva, discursiva e operatória.

*Apreensão sequencial*: refere-se à ordem da construção de uma figura geométrica, com a ajuda de um instrumento.

*Apreensão perceptiva*: diz respeito à interpretação das formas de uma figura geométrica que permite identificar ou reconhecer de forma direta o objeto.

*Apreensão discursiva*: corresponde à explicitação de outras propriedades Matemáticas da figura, além das que são assinaladas por uma legenda ou pelas hipóteses.

*Apreensão operatória*: modificações e/ou transformações possíveis da figural inicial e pela organização perceptiva que essas modificações apontam para obter novos elementos que podem nos levar à solução de uma determinada situação-problema.

Segundo Salazar (2009, p. 87), “a visualização, como atividade cognitiva, é intrinsecamente semiótica [...]. Além do mais, a representação semiótica depende da apreensão perceptiva e é sempre mostrada dentro da percepção visual (registro figural) ou em sua extensão mental”.

Em relação ao registro figural, a autora salienta a existência do registro figural dinâmico definindo-o como “o registro figural utilizado em ambientes de Geometria Dinâmica.” (SALAZAR, 2009, p. 86).

### **Visualização em Geometria**

Segundo Zimmermann e Cunningham (1991 apud COSTA, 2000, p. 169) “a visualização está relacionada com os mais diversos ramos da matemática e é multifacetada, possuindo raízes na matemática e envolvendo aspectos históricos, filosóficos, psicológicos, pedagógicos e tecnológicos importantes”.

O termo visualização possui inúmeras definições, entretanto destacamos aqui as definições de dois autores que julgamos mais adequadas para esse trabalho. Para Zimmermann e Cunningham (1991) a visualização matemática é o processo de formação de imagens, seja mentalmente, com papel e lápis ou com o auxílio da tecnologia, e a utilização dessas imagens para descobrir e compreender matemática. Para Duval (1999) é uma atividade cognitiva intrinsecamente semiótica, sendo esta atividade de representação e não apenas de percepção. Duval (2002) salienta que ao contrário da visão, que fornece um acesso direto ao objeto, a visualização é baseada na produção de uma representação semiótica, pois mostra relações, ou melhor, a organização das relações entre unidades figurais de representação.

O autor ressalta que a visualização em matemática é necessária porque ela exige a organização das relações.

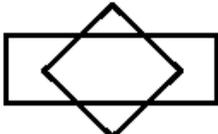
“a diferença entre a atividade requerida pela matemática e aquela requerida em outros domínios do conhecimento não deve ser procurada nos conceitos” (Duval, 2008, p. 13), mas sim na importância da visualização e na grande variedade de representações utilizadas em matemática. A representação e a visualização estão no núcleo de sua compreensão e o papel de ambas é fundamental no pensar e aprender matemática. (ALMEIDA, 2010, p. 68).

Para Duval (2011), das representações produzidas para que possamos ver, as figuras geométricas são as mais naturais. Possuem um poder cognitivo particular por terem

um valor intuitivo, por não exigirem explicação complementar e por permitirem um reconhecimento quase que imediato dos objetos representados. Elas são construídas instrumentalmente, seja com régua, com compasso ou com um software, para considerar relações e distinguir uma figura de outra, sendo que as construções feitas em um software podem ser modificadas o que permite efetuar verificações e observações em tempo real.

Entretanto ver uma figura e procurar analisar elementos que sejam significativos à compreensão de ideia matemática, não é tão simples. Cavalca (1997), por exemplo, mostra que os alunos muitas vezes interpretavam figuras com a racionalidade do dia-a-dia e não com a perspectiva de análise matemática. Segundo Duval (2011) para se ver uma figura, com tal perspectiva, é necessário mudar o olhar sem que a representação visual seja alterada, seja ela feita no papel ou na tela de um computador. Ou seja, como mostra o quadro 2, é necessário desconstruir dimensionalmente as formas que reconhecemos à primeira vista em outras formas não vistas de imediato.

**Quadro 2 – Maneiras de ver uma figura geométrica plana**

Figura 2D	Decomposições em unidades figurais 2D		Decomposição em unidades figurais 1D
	Acoplamento/decomposição por <b>Justaposição</b>	Acoplamento por <b>Superposição</b>	Construção instrumental
	5 formas poligonais (dois triângulos, dois pentágonos, um hexágono)	2 polígonos regulares (um quadrado e um retângulo)	8 lados

Fonte: Duval, 2011, p. 87- adaptação nossa.

Ao se trabalhar com régua e compasso os desenhos são estáticos e, geralmente, feitos em uma mesma posição, por exemplo, triângulos com base na horizontal. Deste modo o aluno cria um protótipo da figura geométrica.

Cada conceito possui um conjunto de atributos críticos e um conjunto de exemplos. Todos os exemplos do conceito são matematicamente equivalentes, no sentido de que eles satisfazem a definição do conceito e contem todos os seus atributos críticos, mas eles são diferentes uns dos outros visualmente e psicologicamente. Existem “super”-exemplos – protótipos – (Rosch & Mervis, 1975) que tendem a ser muito mais populares do que todos os outros. (HERSHKOWITZ, 1994, p. 47)

Entende-se por conjunto de atributos críticos as características que diferenciam um conceito geométrico de outro. Como exemplificado por Hershkowitz (1994), o triângulo

isósceles possui como atributos críticos: (a) ser triângulo (b) que possui dois lados (c) que são iguais.

Os alunos desenvolvem uma imagem mental correta, porém incompleta pelo fato de considerarem o protótipo como o conceito, como explicitado na pesquisa que Hershkowitz (1994) desenvolveu com alunos e professores do ensino fundamental. Este fato “fundamenta a suposição de que os elementos perceptivo-visuais também desempenham algum papel na formação do conceito.” (HERSHKOWITZ, 1994, p. 51).

## Referências

ALMEIDA, I. A. C.; SANTOS, M. C. A visualização como fator de ruptura nos conceitos geométricos. In: **XVIII Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico – GRAPHICA**. Artigos. Paraná, 2007. Disponível em: <[http://www.degraf.ufpr.br/artigos\\_graphica/AVISUALIZACAO.pdf](http://www.degraf.ufpr.br/artigos_graphica/AVISUALIZACAO.pdf)> Acesso em 17 jun. 2011.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Editora UFPR, 2010.

ALVES, G. S. **O uso de softwares de Geometria Dinâmica para o desenvolvimento de habilidades cognitivas: uma aplicação em alunos do ensino médio**. 2004. 200 p. Dissertação (Mestrado em Informática). Instituto de Matemática, UFRJ, Rio de Janeiro.

BRASIL, Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC / SEF, 1998. 148 p.

CAVALCA, A. P. V. **Espaço e Representação Gráfica: visualização e interpretação**. 1997. 169 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). PUC, São Paulo.

COSTA, C. Visualização, veículo para educação em Geometria. In: **IX Encontro de Investigação em Educação Matemática**. 2000. Portugal.

DUVAL, R. Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic issues for learning, 1999.

\_\_\_\_\_. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: Machado, S. D. A. (Org.) **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. São Paulo: Papirus, 2003.

\_\_\_\_\_. **Semiosis y Pensamiento Humano**. Peter Lang, 2004.

\_\_\_\_\_. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros Semióticos e Aprendizagens Intelectuais**. Coleção Contexto da Ciência. São Paulo: Livraria Editora da Física, 2009.

\_\_\_\_\_. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas**. 1 ed. São Paulo: PROEM, 2011.

FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. O papel heurístico de uma figura geométrica: o caso da operação de reconfiguração. In: **VIII Encontro Nacional de Educação Matemática (VIII ENEM)**, 2004, Recife. Disponível em: <<http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/02/1CC88890589949.pdf>>. Acesso em 7 set. 2012.

GARCIA, L. M. I. A visualização e a representação geométrica de conceitos matemáticos e suas influências na constituição do conceito matemática. In: **X Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática – EBRAPEM**. Artigos. Minas Gerais, 2006. Disponível em: <<http://www.fae.ufmg.br/ebrapem/completos/08-06.pdf>> Acesso em 17 mai. 2011.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 3 ed. São Paulo: Atlas, 2010.

GUIMARÃES, S. D.; VASCONCELLOS, M.; TEIXEIRA, L. R. M. O ensino de geometria nas séries iniciais do Ensino Fundamental: concepções dos acadêmicos do Normal Superior. **Zetetike**. Campinas, 2006. v. 14. n. 25. Disponível em: <<http://www.fae.unicamp.br/zetetike/viewissue.php?id=6>> Acesso em 08 jan. 2011.

HERSHKOWITZ, R. Visualização em Geometria – As duas faces da moeda. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 32, pp. 45-61, 1994.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de curso de Licenciatura em Matemática**. 2009. 294 f. Tese (Doutorado em Educação). UFPR, Curitiba.

MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em Matemática: Registro de Representação Semiótica**. São Paulo: Papirus, 2003.

SALAZAR, J. V. F. **Gênese instrumental na interação com Cabri-3D: um estudo de transformações geométricas no espaço**. 2009. 317 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC, São Paulo.