

A Influência das Etapas de Escolha e das Representações Simbólicas
na Resolução de Problemas Combinatórios
por Estudantes do 5º Ano do Ensino Fundamental

Danielle Avanço Vega Pontes

Rute Elizabete de Souza Rosa Borba

GD1 – Educação Matemática nos Anos Iniciais

RESUMO

Este projeto de pesquisa busca investigar um processo de ensino no qual será verificada a influência das etapas de escolha e de representações simbólicas na resolução dos diferentes tipos de problemas combinatórios em turmas de 5º ano do Ensino Fundamental. O método consiste em aplicação de teste de sondagem dos conhecimentos, intervenção pedagógica e testes posteriores. Os dados coletados na sondagem inicial apontam que resolver problemas de três e quatro etapas de escolha se diferenciam significativamente apenas nos problemas de permutação. Ainda não foi realizado o ensino de Combinatória e os pós-testes nos quais será possível confirmar a influência que as etapas de escolha e as representações simbólicas têm na resolução dos problemas de Combinatória.

Palavras chaves: Ensino, Combinatória, Etapas de Escolha, Representação Simbólica.

1. Introdução

O objetivo do ensino de Combinatória é *“levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem”* (PCN, Brasil, 1997, p. 40). Essa é a orientação dos Parâmetros Curriculares Nacionais em relação ao raciocínio combinatório e estudos Danielle Avanço Vega Pontes, UFPE, danielleavanco@yahoo.com.br

Rute Elizabete de Souza Rosa e Borba, UFPE, borba@talk21.com

anteriores evidenciam que alunos possuem algum conhecimento de Combinatória, mas apresentam dificuldades em algumas relações combinatórias – o que confirma que esse conteúdo pode ser trabalhado desde os anos iniciais, mas que intervenções de ensino se fazem necessárias.

De acordo com Borba (2010), raciocínio combinatório é a forma de pensar sobre situações envolvendo o levantamento de possibilidades que atendem a determinadas condições, que consideram se há repetição, escolha e ordenação de elementos, dentre outras relações. Essa forma de raciocinar é uma competência mais complexa e que deve ser estimulada, pois se constitui em base para a resolução de situações problematizadoras.

As dificuldades que os estudantes apresentam em desenvolver o raciocínio combinatório têm sido relatadas por diversos autores. (Carraher, Carraher e Schliemann, 1988; Moro & Soares, 2006; Taxa-Amaro, 2006; Pessoa e Borba, 2009). Essas dificuldades ocorrem em distintos níveis e modalidades de ensino.

Por outro lado, observa-se que a concepção de alguns princípios de raciocínio combinatório pode-se iniciar antes do ensino escolar, tendo evidências de conhecimentos intuitivos desde a educação infantil, como destacado em Matias, Santos e Pessoa (2011) quando afirmam que *“crianças na Educação Infantil possuem um raciocínio combinatório, que poderia ser melhor desenvolvido dependendo do estímulo que podem ter no ambiente escolar ou extra escolar”* (p.11), pois quando se propõe situações-problema que envolvam regras de um jogo, escolha de vestimentas, formações de casais para dança de São João, combinações de sucos e sanduiches, explora-se assim, a combinatória e a probabilidade nos anos iniciais de escolaridade. Pessoa e Borba (2012) também observaram noções combinatórias intuitivas em crianças de cinco e seis anos de idade sendo a relação de escolha de elementos a mais facilmente percebida pelas crianças e as de ordem e esgotamento de possibilidades são relações mais complexas e difíceis de serem apreendidas.

Pessoa e Borba (2010) investigaram como alunos desde o 2º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio compreendem os problemas que envolvem a Combinatória. Os estudantes resolveram um teste constituído por oito problemas que abordavam os diferentes significados da Combinatória (*produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação*). As autoras observaram que o *produto cartesiano* foi o significado em que os estudantes obtiveram os melhores desempenhos. Por outro lado, as

maiores dificuldades foram identificadas nas resoluções dos problemas de *permutação* e de *combinação*. A maioria dos acertos foi observada nos problemas que apresentaram uma grandeza numérica pequena, pois os valores dos resultados dos problemas foram as variáveis controladas dessa pesquisa. Contudo é preciso buscar controlar outras variáveis que podem influenciar a compreensão desses problemas.

Dessa forma, o presente estudo pretende controlar as etapas de escolha de elementos, buscando verificar se há influência do número de etapas na resolução dos diferentes tipos de problemas. Esse controle de número de etapas de escolha não havia sido uma preocupação de estudos anteriores

Tendo em vista que, diversas pesquisas recentes investigaram o raciocínio combinatório (Pessoa e Borba, 2010; Azevedo, Costa e Borba, 2011; Silva e Spinillo, 2011; Barreto, 2012) e analisaram como os alunos pensam sobre problemas desta natureza, quais as dificuldades e facilidades identificadas, conceitualizações e estratégias de resolução evidenciadas, cabe agora, buscar uma compreensão mais ampla a respeito da aprendizagem de Combinatória e, em particular, quando as etapas de escolha são controladas.

Assim, o presente projeto de pesquisa se propõe a analisar, através da resolução de problemas combinatórios, o desempenho de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental com relação ao uso de duas representações simbólicas quando as etapas de escolha são mantidas constantes nos diversos tipos de problemas.

Podem-se exemplificar melhor as etapas de escolha com o exemplo a seguir:

EXEMPLO: Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio haviam três opções de **comida** (sanduíche, pizza e coxinha), dois tipos de **bebida** (suco e refrigerante) e duas opções de **sobremesa** (bolo e sorvete). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa?

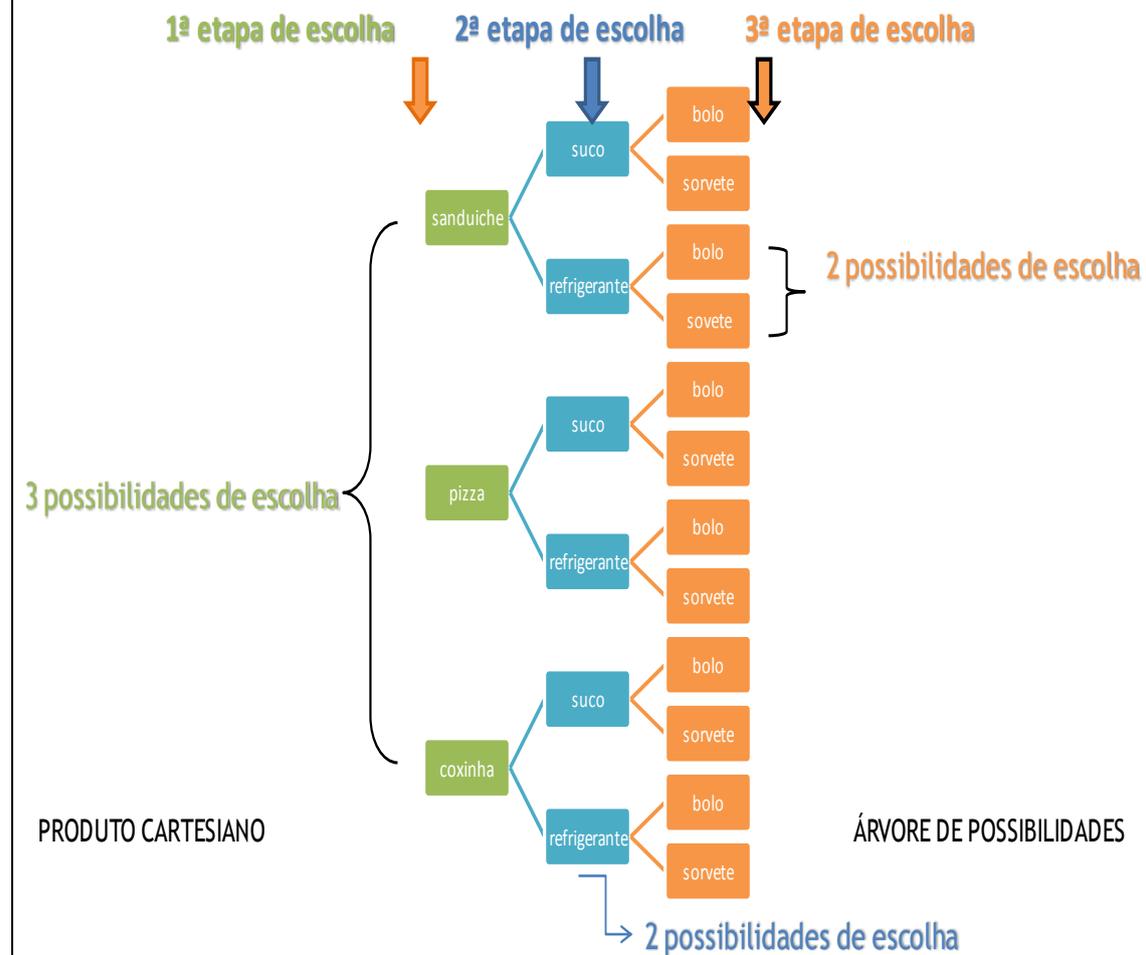


Figura 1: Etapas de escolha em um problema de *produto cartesiano*

A Figura 1 representa a estrutura de um problema de *produto cartesiano* que envolve três etapas de escolha, pois são dados três conjuntos distintos e os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto. Nesse caso, as escolhas das comidas se caracterizam como a 1ª etapa de escolha, as escolhas das bebidas são a 2ª etapa de escolha e as escolhas das sobremesas formam a 3ª etapa de escolha. Cada conjunto possui uma quantidade de elementos que ao serem combinados, conforme a representação mostrada acima, formarão um quarto conjunto (o de possíveis lanches para Douglas).

A proposta de resolução desse problema está fundamentada no Princípio Fundamental da Contagem que se baseia no número de etapas de escolha e de elementos

de cada etapa de escolha, que combinados trarão a resposta da questão indagada no problema.

2. Base teórico-metodológica

A Combinatória está inserida no campo conceitual das estruturas multiplicativas. Vergnaud (1986) define campo conceitual como “*um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão*”. (1986, p.84). O campo conceitual das estruturas multiplicativas, de acordo com Vergnaud (ibidem), é descrito como um conjunto de situações que envolvem a multiplicação e a divisão, as proporções simples e múltiplas, dentre outros conceitos. Entre essas situações, encontram-se os problemas que envolvem o *raciocínio combinatório*.

No estudo de Combinatória, Pessoa e Borba (2010) estabelecem a seguinte organização para os significados das situações combinatórias: *produto cartesiano*, *permutação*, *arranjo* e *combinação*. Essa organização será usada no estudo aqui proposto. Barreto e Borba (2011) esmiúçam cada significado dos problemas de Combinatória:

O problema que envolve o *produto cartesiano* é composto, no mínimo, por dois conjuntos básicos, sendo necessário, combinar cada elemento de um conjunto com cada elemento do outro para formar o conjunto-solução. A operação com problemas que envolvem o *arranjo*, a *permutação* e a *combinação*, consiste basicamente, em formar subconjuntos, a partir de um conjunto, atendendo a determinadas condições peculiares a cada um desses significados (com todos os elementos – no caso da *permutação* – ou com alguns dos elementos – nos casos do *arranjo* e da *combinação* e levando em consideração se a ordem dos elementos gera, ou não, novas possibilidades). Portanto, nesses casos, o *raciocínio combinatório* se desenvolverá na organização dos elementos de um conjunto básico, diferente do *produto cartesiano* que envolve a associação entre dois ou mais conjuntos básicos. (p. 02)

Essa disposição para os significados das situações combinatórias basearam diversas pesquisas no campo da Combinatória, sendo que algumas tratam das elaborações de crianças, adolescentes e adultos, referentes a estes conceitos matemáticos, apresentando resultados relevantes da compreensão das estruturas multiplicativas. Porém, poucas investigações foram realizadas no que concerne ao ensino pedagógico sistemático e na análise da resolução dos problemas combinatórios quando as etapas de escolha são controladas e quando se observa o efeito de usos distintos de representações simbólicas.

Barreto e Borba (2011) desenvolveram uma metodologia pedagógica de ensino na Educação de Jovens e Adultos com o objetivo de auxiliar a superação de dificuldades com

problemas que envolvem a Combinatória. A finalidade do ensino foi abordar os significados da Combinatória, por meio de formas de representação variadas, verificando-se um avanço no desempenho dos alunos, mostrando a importância do ensino pedagógico sistemático para auxiliar o desenvolvimento de conceitos matemáticos, em particular da Combinatória.

A dissertação de mestrado de Barreto (2012) deixa claro a influência das diferentes representações simbólicas na resolução de problemas combinatórios em 24 alunos da EJA, separados em três grupos de intervenção, no qual o Grupo 1 resolveu metade dos problemas usando listagens e a outra metade usando árvores de possibilidades, o Grupo 2 resolveu todos os problemas com árvores de possibilidades e o Grupo 3 resolveu todos os problemas usando listagens.

Os procedimentos metodológicos utilizados por Barreto (ibidem) foram: pré-teste, intervenção e pós-teste. Por meio destes, os resultados da autora mostraram avanços nos três grupos e apontaram que no pós-teste a listagem foi a representação simbólica mais usadas em todos os grupos, inclusive naquele que não fez uso de tal representação na intervenção.

Partindo dos resultados da autora, tentar-se-á responder através da presente pesquisa se o uso de duas representações simbólicas terá maior efeito no aprendizado se for trabalhado de modo concentrado (um tipo de representação por vez) ou alternado (cada problema sendo resolvido pelas duas formas de representação).

A proposta de ensino do presente estudo baseia-se na teoria de desenvolvimento conceitual proposta por Vergnaud (1986). Esta teoria foi aplicada na pesquisa de Borba (2002), relatado em Borba e Nunes (2004), que estudou a resolução de problemas aditivos com inteiros relativos, para se observar como o desempenho varia em função das três dimensões propostas (significados, propriedades invariantes e representações simbólicas) e se as mesmas interagem entre si. O processo de ensino de Borba (2002) em sala de aula não se pautou em procedimentos, mas levou os alunos a pensar sobre as situações propostas, os significados envolvidos e as representações simbólicas que poderiam ser utilizadas.

Segundo Vergnaud (1986, p.83) todo conceito é formado por um "tripé de três conjuntos": 1) conjunto de situações que dão *significado* ao conceito; 2) conjunto de propriedades *invariantes* do conceito e 3) conjunto das *representações simbólicas*

utilizadas para representar e operar com o conceito. Essas três dimensões dos conceitos estão destacadas na presente pesquisa: quando se compara os desempenhos dos alunos nos problemas com *significados* variados (os quatro tipos de problemas); quando se aborda as relações *invariantes* nos distintos problemas e em particular no número de etapas de escolha sendo controladas e quando se organiza as formas de manipular as *representações simbólicas* durante a intervenção pedagógica.

Sendo assim, busca-se observar o efeito de cada dimensão no desempenho dos alunos frente aos problemas combinatórios, identificando quais aspectos dessas dimensões são mais facilmente compreendidos pelos estudantes, possibilitando o alcance das respostas às perguntas que impulsionam a presente pesquisa.

3. Objetivos

Geral:

Analisar o efeito de representações simbólicas e de número de etapas de escolha no desempenho de alunos do 5º ano do Ensino Fundamental por tipo de problema combinatório.

Específicos:

Verificar o efeito do uso de duas representações, de forma alternada ou concentrada, no ensino de Combinatória;

Comparar os desempenhos dos alunos por tipo de problema quando as etapas de escolha são controladas.

4. Método

O presente estudo se desenvolverá a partir da aplicação de *testes de sondagens* com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, *intervenções pedagógicas* e *pós-testes imediatos e posteriores* (8 semanas após a intervenção para verificação de estabilização dos conhecimentos adquiridos).

Até o momento, foi realizado um estudo piloto que envolveu uma sondagem e uma nova sondagem será realizada no estudo efetivo. Durante a coleta dos dados, os alunos resolveram, individualmente, um teste contendo oito problemas de *Combinatória*, dois de cada tipo: *produto cartesiano*, *combinação*, *arranjo* e *permutação*. Havia em cada tipo de

problema um que envolvia três etapas de escolha e um que envolvia quatro etapas de escolha

Posteriormente, com a intervenção pedagógica do estudo efetivo, as turmas serão distribuídas em dois grupos experimentais. Esses grupos variarão na forma de representação que os alunos irão utilizar para resolver os problemas propostos: o Grupo 1 resolverá quatro problemas com árvores de possibilidades e quatro com listagens, o Grupo 2 resolverá quatro problemas tanto com árvore como com listagem.

Em ambos os grupos de ensino, os alunos serão questionados de forma a desenvolverem procedimentos próprios e não a aprenderem procedimentos únicos ensinados diretamente. Dessa forma, não se ensinarão métodos fechados de resolução dos problemas combinatórios, mas, sim, formas de se pensar sobre as relações combinatórias.

Esses grupos serão envolvidos em processos de ensino distintos e depois realizarão pós-testes imediatos e posteriores.

4.1 Questões do teste piloto

Os problemas contidos nos testes do estudo piloto variam estruturalmente entre três e quatro etapas de escolha. As situações-problema utilizadas nos testes foram adaptadas do estudo de Azevedo, Costa e Borba (2011).

Cada aluno respondeu um teste individual com as seguintes questões:

Quadro 1- Questões do teste sondagem

TIPOS DE PROBLEMAS	ETAPAS	QUESTÕES
Produto Cartesiano	3	Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio haviam três opções de comida (sanduíche, pizza e coxinha), quatro tipos de bebida (suco, água, chá e refrigerante) e duas opções de sobremesa (bolo e sorvete). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa?
	4	Jane quer escolher diferentes combinações de roupas e acessórios, ela possui quatro blusas (rosa, laranja, azul e vermelha), três calças (preta, branca e jeans azul), dois sapatos (salto alto e rasteirinha) e dois brincos (argolas prateadas e bolinhas douradas). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas calças, um de seus sapatos e um de seus brincos?
Combinação	3	Felipe, Sandra, Carla, Henrique, José e Ana vão formar trios para cantar no festival da escola. Quantos trios diferentes podem ser formados?
	4	Uma escola tem sete professores (Paulo, Roberto, Ângela, Rute, Carlos, Gilda e Fernando). Para o passeio da escola serão escolhidos quatro professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses quatro professores?
Arranjo	3	Quatro turmas da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C e Turma D) vão disputar um torneio de queimado. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio?
	4	De quantas maneiras possíveis podem-se escrever números de quatro algarismos diferentes, usando os algarismos 2, 3, 4, 6 e 7?
Permutação	3	De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Ana e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?
	4	Gabriela quer arrumar os porta-retratos de sua casa. Ela tem quatro fotos, a de sua mãe, de seu pai, a sua e de seu irmão. De quantas maneiras diferentes ela poderá organizá-los lado-a-lado na estante?

As questões do teste foram dispostas de diferentes formas. Essa estratégia foi tomada visando a identificação de alguma dificuldade ou facilidade gerada em virtude da ordem dos problemas a serem resolvidos. Com isso, geraram-se quatro testes (A, B, C e D) que continham os mesmos problemas, no entanto, com as posições das questões distintas entre si. No teste do tipo A, a organização dos problemas iniciava-se por questões de *produto cartesiano*. Já no teste do tipo B, o problema inicial era de *combinação*. O teste C, começava com problema de *arranjo*. E o problema de *permutação* iniciou o teste do tipo D.

4.2 Participantes do estudo piloto

Participaram da pesquisa 41 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental de duas escolas públicas do estado de Pernambuco. As escolas e turmas foram escolhidas pela

disponibilidade em ceder o espaço para a pesquisa. Participaram da pesquisa 20 alunos na escola A e 21 alunos na escola B.

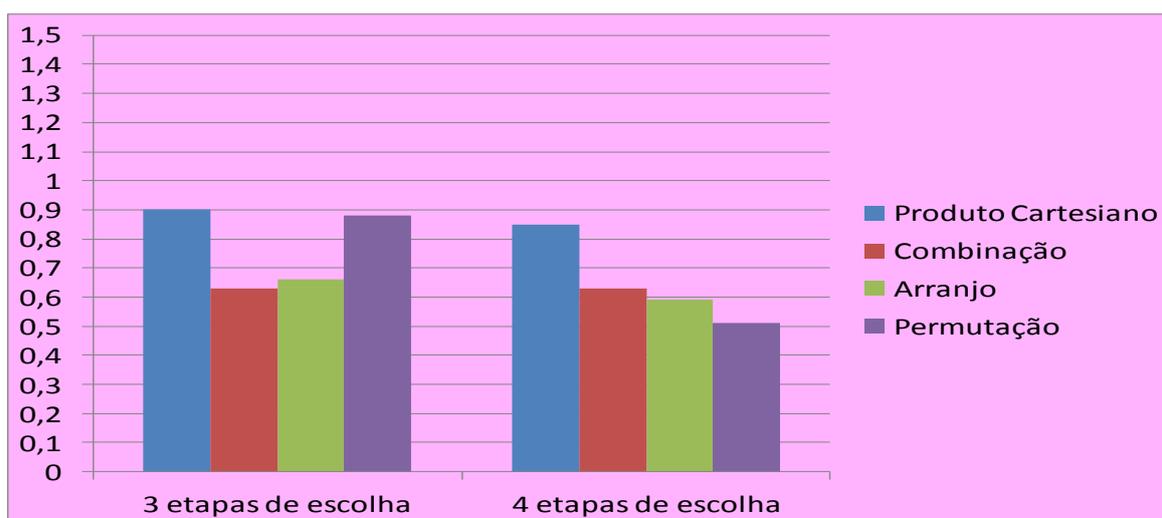
4.3 Análises de dados do estudo piloto

A análise dos dados da sondagem do estudo piloto foi realizada de forma qualitativa e quantitativa, cuja estatística foi efetuada através do *Statistical Package for the Social Sciences* – SPSS. As análises qualitativas serão realizadas após a intervenção pedagógica e os testes posteriores.

Uma das variáveis analisadas foram os diferentes tipos de teste aplicado, nos quais cada teste (A, B, C e D) iniciava-se com um tipo distinto de problema. A alternância dos problemas na organização dos testes não influenciou a atuação dos alunos, pois não foram observadas diferenças significativas de desempenho (em nível de 0,05) entre os participantes em função do teste resolvido.

Outra variável observada foi o desempenho dos alunos ao responderem questões com três e quatro etapas de escolha nos diferentes tipos de problemas do teste de sondagem. Analisando-se a média de acertos foi possível visualizar uma maior variação em desempenho com relação aos problemas de *permutação*, como mostra o Gráfico 1 abaixo:

Gráfico 1: Média de acertos dos alunos em cada problema



Através desse gráfico, é possível perceber que os problemas de *produto cartesiano* foram os que apresentaram um melhor desempenho, tanto nos problemas de três quanto nos de quatro etapas de escolha.

Contudo é possível averiguar que nos problemas de *permutação*, as etapas de escolha influenciam na performance dos estudantes, pois o problema de quatro etapas de escolha foi o que exibiu uma média de acerto mais baixa.

Partindo dos dados visualizados no Gráfico 1, realizou-se um Teste t de amostras em pares e verificou-se que resolver questões com três e quatro etapas apresentou diferença significativa apenas no problema de *permutação* ($t(40) = 2,727, p = 0,009$).

Os dados, portanto, revelaram que responder problemas do tipo *permutação* com três etapas de escolha é significativamente mais fácil que responder problemas de quatro etapas para esse grupo de alunos do Ensino Fundamental, mas diferenças estatisticamente significativas não foram encontradas para os outros tipos de problemas combinatórios quando o número de etapas de escolha de elementos foi controlado.

5. Considerações Finais

Os resultados iniciais desta pesquisa de dissertação de mestrado oferecem subsídios para destacar as etapas de escolhas dos problemas de Combinatória enquanto variável que pode influenciar no desempenho de alunos do Ensino Fundamental ao responderem questões dessa natureza, em particular nos problemas de *permutação*.

Esse estudo busca contribuir para uma maior compreensão das dificuldades encontradas por alunos e da ordem de facilidade que possuem em relação aos diferentes tipos de problemas combinatórios.

Os resultados apontaram que a ordem de resolução das questões não determinou nenhum tipo de diferença no desempenho dos estudantes.

A análise das representações simbólicas só poderá ser efetuada após a intervenção de ensino e os pós-testes.

Os dados aqui analisados refletem os resultados apenas do teste piloto de sondagem realizado com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. Após esse estudo piloto, serão realizados novos testes de sondagem, a intervenção pedagógica e realização de testes posteriores para que haja uma análise satisfatória do objetivo proposto.

6. Referências

AZEVEDO, J; COSTA, D. da; BORBA, R. O impacto do software Árbol no raciocínio combinatório. *Anais...* da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife - PE, 26 a 30 de junho de 2011.

BARRETO, F; BORBA, R. Intervenções de Combinatória na educação de jovens e adultos. **Anais...** da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife - PE, 26 a 30 de junho de 2011.

BARRETO, F. **O papel das representações simbólicas no desenvolvimento do raciocínio combinatório na educação de jovens e adultos.** Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica. UFPE, 2012.

BORBA, R. **The effect of number meanings, conceptual invariants and symbolic representations on children's reasoning about directed numbers.** Tese de doutorado. Reino Unido. Psychology Department, Oxford Brookes University: 2002.

BORBA, R; NUNES, T. Como significados, propriedades invariantes e representações simbólicas influenciam a compreensão do conceito de número inteiro relativo. **Revista Educação Matemática Pesquisa.** São Paulo, v.6, n.1, pp. 73-100, 2004.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília: Ministério da Educação e Desporto – Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

CARRAHER, T. N; CARRAHER, D; SCHLIEMANN, A. **Na vida dez, na escola zero.** São Paulo: Cortez, 1988.

MATIAS, P. C; SANTOS, M. M. de S; PESSOA, C. A. dos S. Crianças de Educação Infantil resolvendo problemas de arranjo. **Anais...** da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife - PE, 26 a 30 de junho de 2011.

MORO, M. L; SOARES, M. T. Psicogênese do raciocínio combinatório e problemas de produto cartesiano na escola fundamental. **Anais...** do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Águas de Lindóia, SP, 2006.

PESSOA, C; BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **ZETETIKÉ** – Cempem – FE – Unicamp, v. 17, jan-jun. 2009.

PESSOA, C; BORBA, R. O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica. **Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v.1, n.1. 2010. Disponível em: <http://emteia.gente.eti.br/index.php/emteia/article/view/4> Acesso em: 08 set. 2011.

PESSOA, C.; BORBA, R. Do young children notice what combinatorial situations require? **Proceedings...** 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME36), Taiwan, 2012.

SILVA, J. da; SPINILLO, A. Como auxiliar crianças na resolução de problemas de raciocínio combinatório: a explicitação dos princípios invariantes. **Anais...** da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife - PE, 26 a 30 de junho de 2011.

TAXA-AMARO, F. Solução de problemas com operações combinatórias. Em M. R. de Brito (Org.), **Solução de problemas e a matemática escolar**, pp. 163-183. Campinas: Alínea, 2006.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, 1, 1986.